Definicije

Standard ISO 8373: Industrijski robotski manipulator je povratnozančno voden, reprogramabilen in večnamenski sistem. Lahko je fiksen ali mobilen. Programabilen je v treh ali več prostostnih stopnjah. Uporabljamo ga v procesih industrijske avtomatizacije.

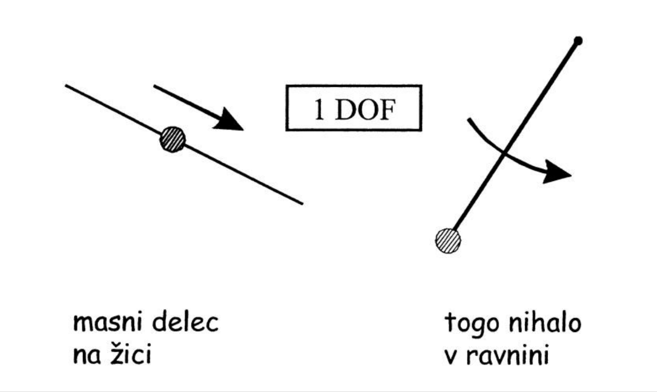
- Robotske mehanizme poganjajo električni ali hidravlični motorji, ki niso odprtozančno krmiljeni. Sestavni del robotskega manipulatorja so vselej tudi senzorji. Tu gre predvsem za notranje senzorje, ki so nameščeni v sklepih robota. To so pretvorniki kota ali razdalje in hitrosti. Pomembni pa so tudi zunanji senzorji, med njimi predvsem senzor sile dotika. Glede na želeno gibanje vrha robota, ki ga določi uporabnik, ter glede na informacijo senzorjev, robotski regulacijski sistem vodi manipulator bodisi po položaju ali po sili.
- Sodobni industrijski proizvodni procesi se odvijajo brez velikih zalog materiala. Kot posledica se na isti liniji v istem dnevu pojavijo različni tipi posameznega izdelka. Lastnost reprogramabilnosti nam omogoča, da zgolj s pritiskom na gumb na zelo enostaven način preidemo s proizvodnje enega tipa izdelka na drugega.
- Robot poskuša biti nekakšen posnetek človekove roke. Enako kot uporabljamo roko za natančna in groba opravila, skušamo isti robotski manipulator uporabiti za različne naloge. To je še posebej pomembno, ker je ekonomska življenjska doba robota razmeroma dolga (12 do 16 let). Tako se zgodi, da smo nek industrijski robot kupili za varjenje, kasneje pa nam bo služil za prenašanje in urejanje izdelkov v palete.

Robotizacija

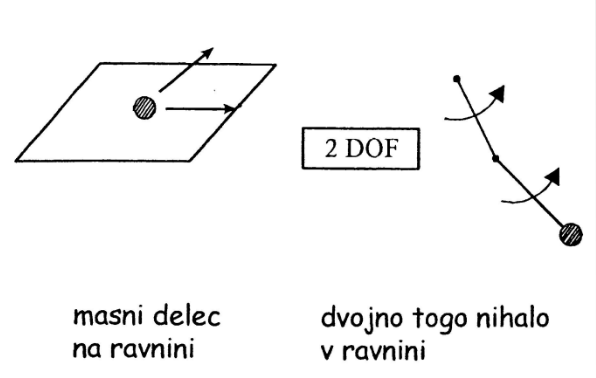
Robotski manipulatorji so običajno fiksni. Navadno so pritrjeni na podstavek na tleh, včasih pa visijo s stropa. Tako ne jemljejo dragocenega prostora na proizvodni liniji. Redkeje so robotski manipulatorji pričvrščeni na mobilno osnovo. Na ta način se njihova fleksibilnost znatno poveča.

Prostostne stopnje (DOF, degree of freedom)

Masni delec, ki se giblje po premici (neskončno majhna kroglica na žici), je sistem z eno stopnjo prostosti. Nihalo s togo pritrditvijo, ki se giblje v ravnini, je prav tako sistem z eno prostostno stopnjo. V prvem primeru opišemo položaj delca z razdaljo, v drugem pa s kotom zasuka.

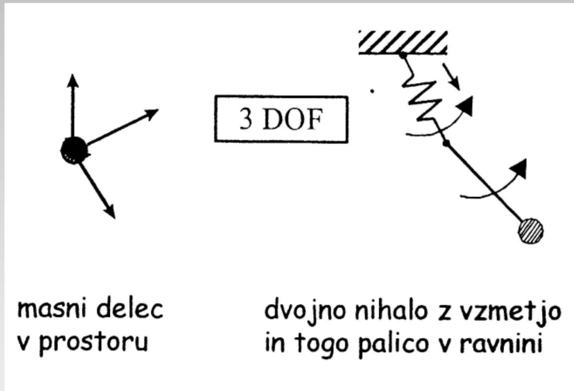


Masni delec, ki se giblje v ravnini, ima dve prostostni stopnji. Položaj delca lahko opišemo s kartezičnima koordinatama x in y. Dvojno nihalo s togima segmentoma, ki niha v ravnini, je tudi sistem z dvema prostostnima stopnjama. Položaj delca opišemo z dvema kotoma.



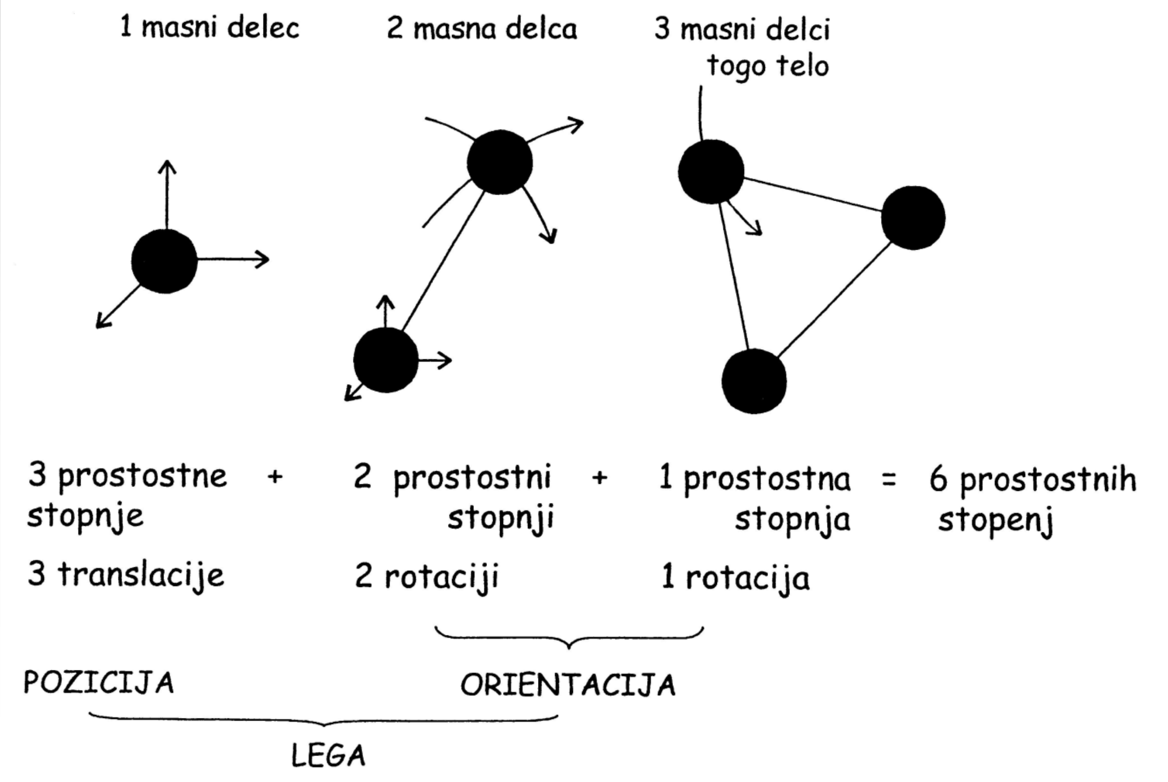
Prostostne stopnje (DOF, degree of freedom)

Masni delec, ki se giblje v prostoru, ima tri prostostne stopnje. Običajno za njegov opis uporabljamo pravokotne koordinate x, y in z. Primer preprostega mehanskega sistema s tremi prostostnimi stopnjami je tudi dvojno nihalo, kjer je prvi segment raztegljiva vzmet, medtem ko drugi segment predstavlja toga palica. Tudi sedaj nihalo niha v ravnini.



Prostostne stopnje togega telesa

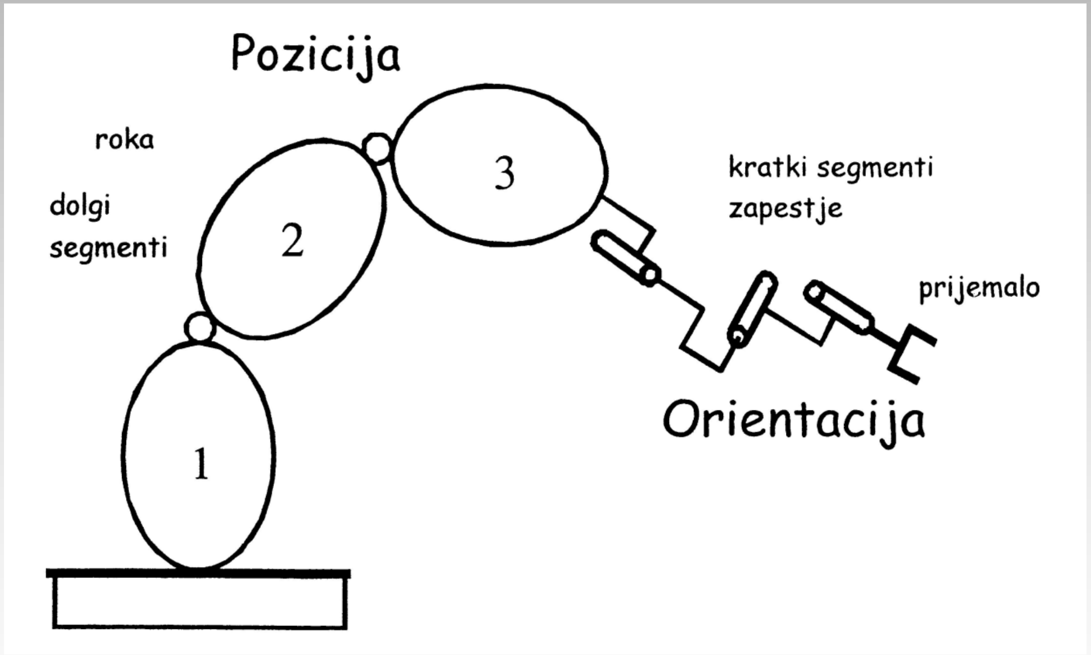
*Najpreprostejše togo telo je sestavljeno iz treh masnih delcev. En sam masni delec ima tri stopnje prostosti, ki jih opišemo s pravokotnimi koordinatami x, y in z. Gibanje vzdolž premice imenujemo **translacija**. Sedaj prvemu masnemu delcu dodajmo še en masni delec s konstantno razdaljo do prvega. Tako drugi masni delec lahko potuje le po površini krogle okrog prvega. Njegov položaj lahko opišemo z dvema krožnicama. Gibanje po krožnici imenujemo **rotacija**. Tretji masni delec dodamo tako, da ima enako konstantno razdaljo do prvih dveh. Na ta način tretji delec opisuje krožnico okrog prvih dveh. Togo telo ima torej 6 prostostnih stopenj: tri translacije in tri rotacije. Prve tri določajo **pozicijo** telesa, druge tri pa njegovo **orientacijo**. Pozicijo in orientacijo z eno besedo imenujemo **lega** togega telesa.*



Robotski manipulator

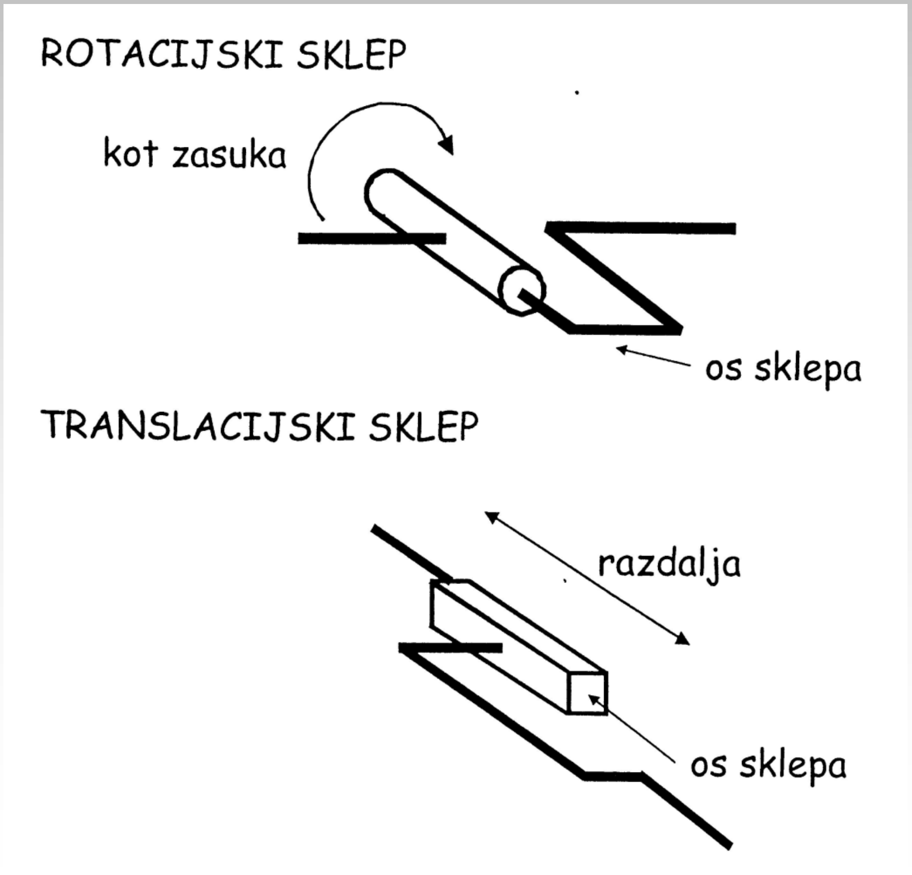
Robotski manipulator sestavljajo roka, zapestje in prijemalo. Naloga robotskega manipulatorja je, da postavi telo, ki ga drži s prijemalom, v poljubno lego. Zato mora tudi robotski manipulator imeti 6 prostostnih stopenj. Segmenti roke so razmeroma dolgi. Naloga robotske roke je, da omogoči želeno pozicijo vrha robota v prostoru. Segmenti zapestja so zelo kratki. Robotsko zapestje ima nalogo, da pravilno orientira predmet, ki ga drži prijemalo.

Robotska roka je serijska veriga treh togih teles, ki jih imenujemo segmenti robotskega mehanizma. Dva sosedna segmenta robotskega manipulatorja povezuje robotski sklep. Sklep zmanjša število prostostnih stopenj med segmentoma. Robotski sklepi imajo eno samo prostostno stopnjo in so lahko translacijski ali rotacijski.



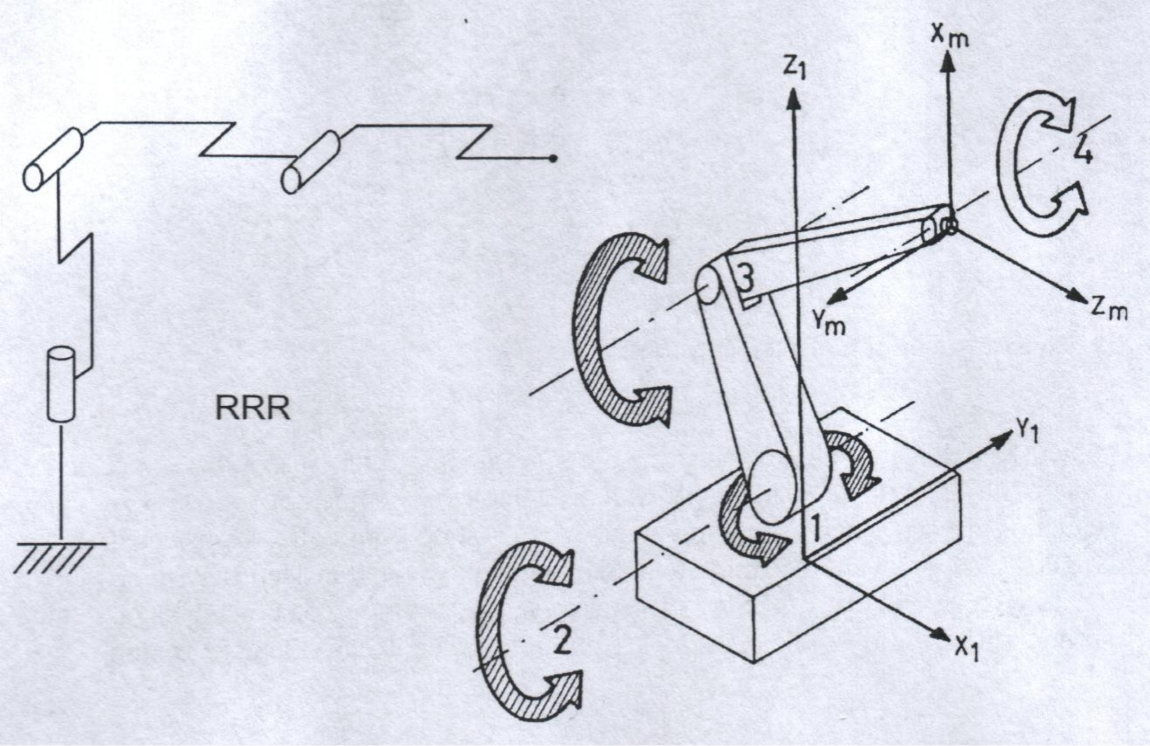
Robotski manipulator

Rotacijski sklep ima obliko tečaja in omejuje gibanje dveh sosednih segmentov na rotacijo okrog skupne osi sklepa. Relativni položaj segmentov podamo s kotom zasuka okrog osi. Rotacijski sklep ponazorimo s simbolom valja. Translacijski sklep omejuje gibanje dveh sosednih robotskih segmentov na translacijo. Pasivno obliko translacijskega sklepa srečamo pri teleskopu. Relativni položaj med segmentoma merimo kot razdaljo vzdolž osi sklepa. Simbol translacijskega sklepa je prizma.



Osi dveh sosednih sklepov robotske roke sta lahko bodisi vzporedni ali pravokotni. Ker ima roka tri prostostne stopnje, imamo na voljo 36 različnih robotski rok, med njimi pa je le 12 zares matematično različnih. V praktičnih izvedbah pa najdemo le 5 različnih rok. To so antropomorfna, sferična, SCARA, cilindrična in kartezična robotska roka.

Antropomorfna roka *ima vse tri sklepe rotacijske. Druga os je pravokotna na prvo in tretja os vzporedna z drugo. Koti zasukov v štirih rotacijskih sklepih (četrta prostostna stopnja pripada zapestju) predstavljajo notranji prostor spremenljivk. Število notranjih spremenljivk je enako številu prostostnih stopenj robotskega mehanizma in tudi številu sklepov robota.*



Robotske roke

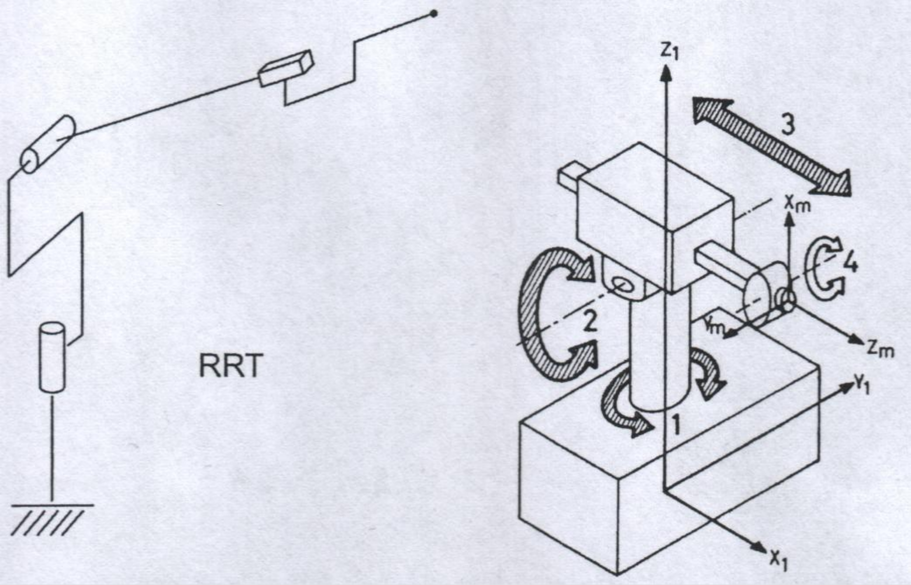
Lego robota lahko povsem opišemo z notranjimi spremenljivkami sklepov, poznavanje le-teh pa je nujno pri regulaciji robota.

Osnovni koordinatni sistem je v večini primerov tudi zunanji ali referenčni koordinatni sistem. Robotsko nalogo podajamo v zunanjem koordinatnem sistemu, tako da podamo lego koordinatnega sistema vrha robota glede na osnovni referenčni koordinatni sistem.

Pozicijo vrha manipulatorja izrazimo s tremi komponentami vektorja, ki povezuje izhodišče osnovnega koordinatnega sistema z izhodiščem koordinatnega sistema vrha robota. Orientacijo telesa najenostavneje podamo s tremi koti med posameznimi pari osi koordinatnega sistema vrha robota in osnovnega koordinatnega sistema

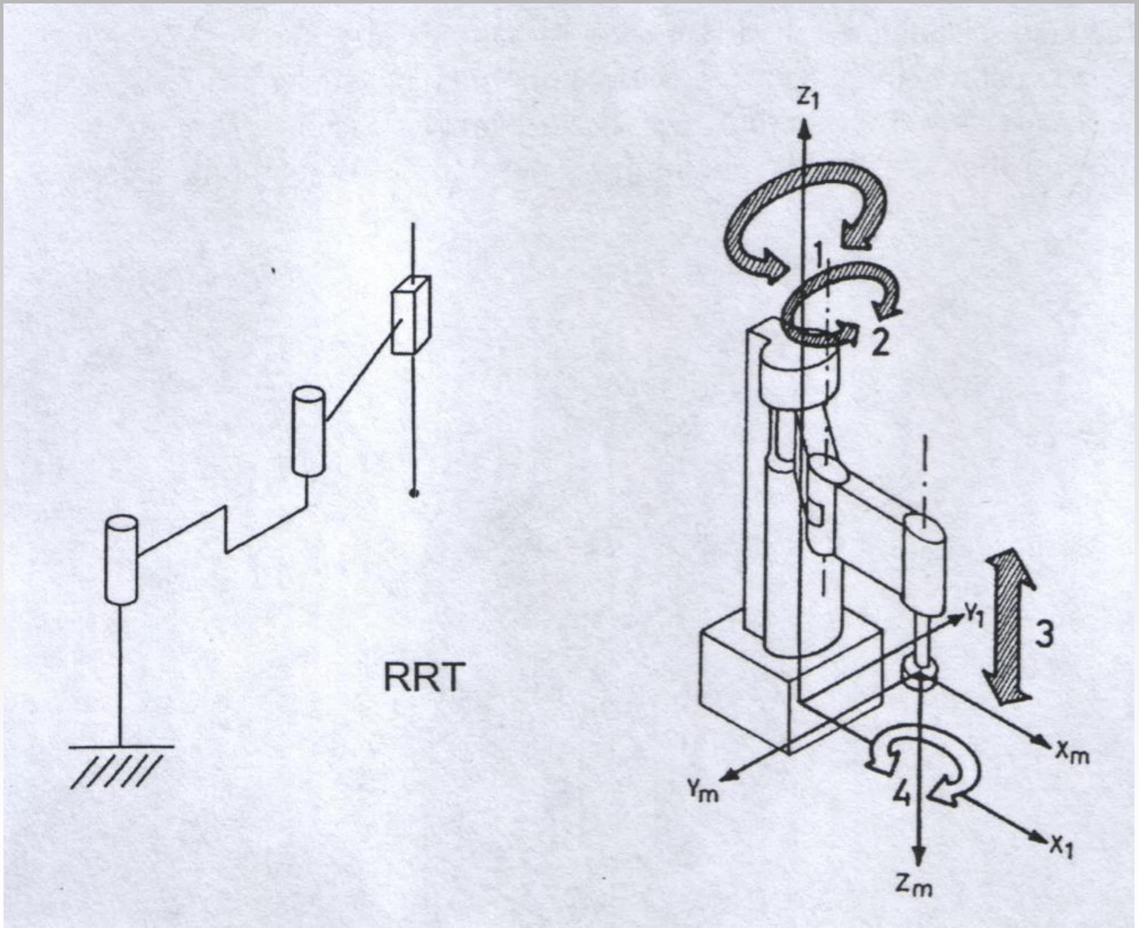
Naša naloga: računanje notranjih spremenljivk robota iz znanih zunanjih in obratno

Robotske roke

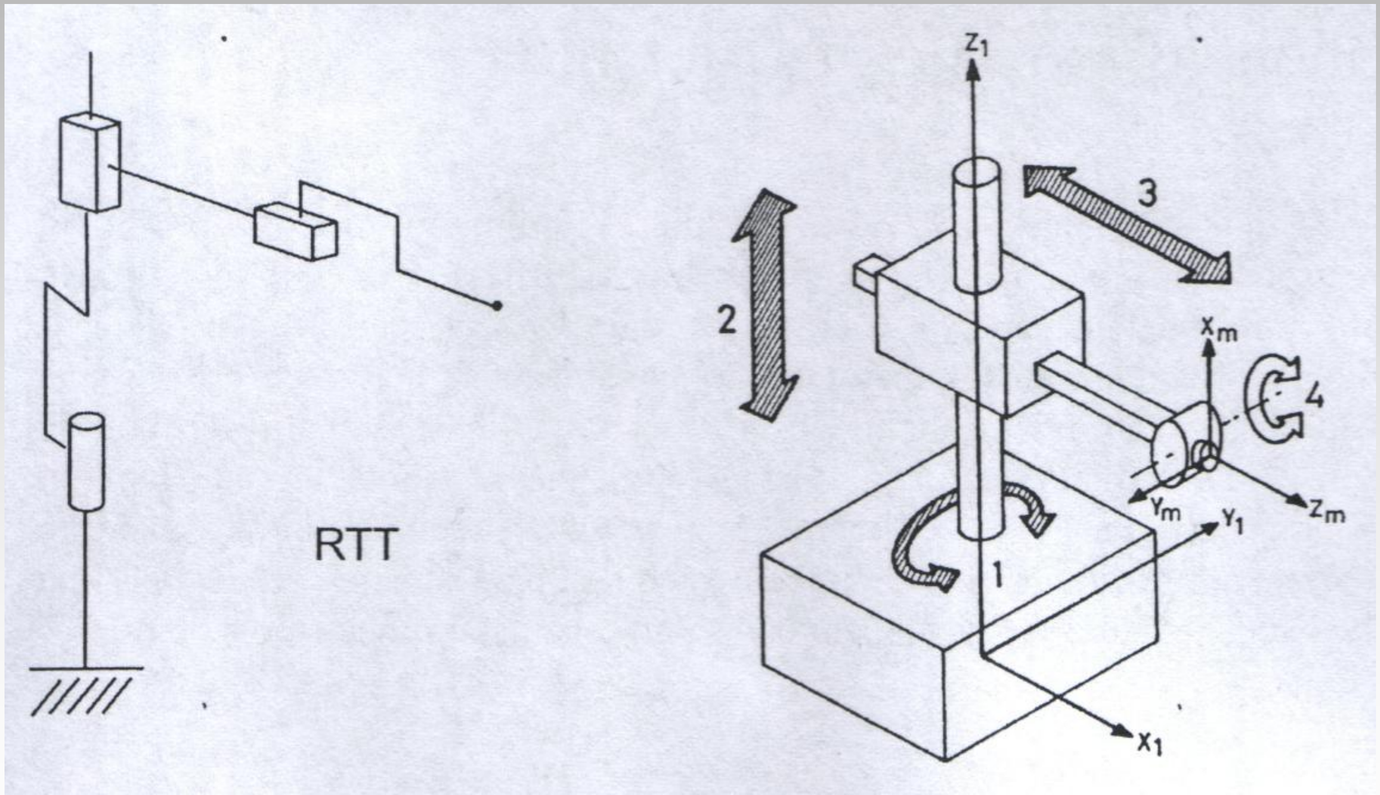


Sferična roka *ima dve rotacijski in eno translacijsko prostostno stopnjo. Os drugega sklepa je pravokotna na prvo os, os tretjega sklepa pa pravokotna na drugo os. Delovni prostor, ki ga lahko doseže vrh manipulatorja, je podoben krogli (od tod tudi ime robotske roke). Tudi delovni prostor antropomorfne roke je kroglaste oblike.*

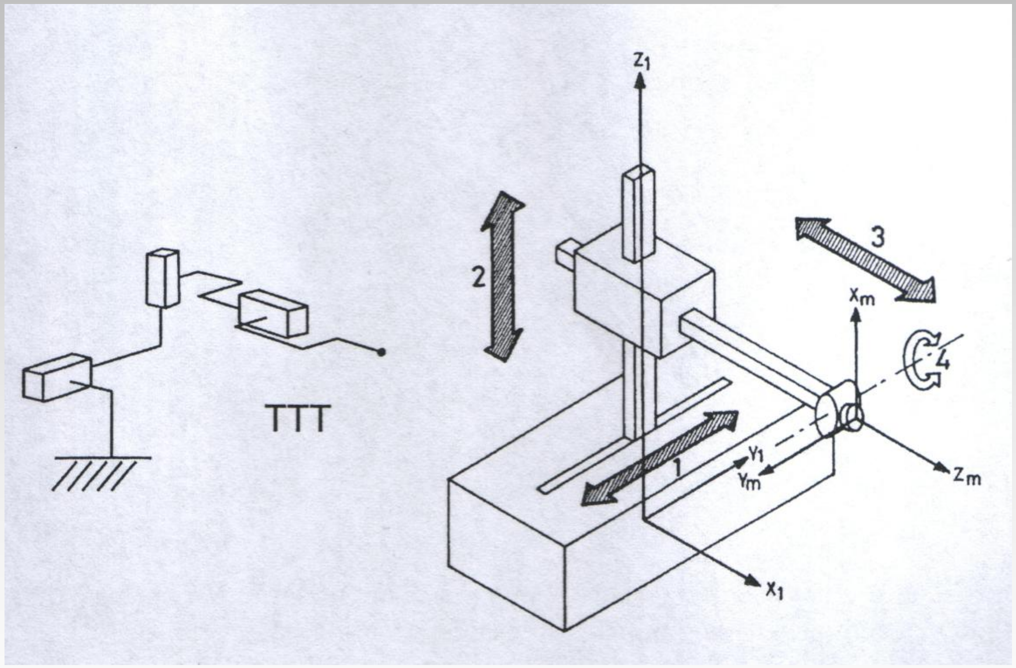
***SCARA** (Selective Compliant Articulated Robot for Assembly) je namenjen predvsem procesom montaže. Dva sklepa sta rotacijska in en translacijski. Osi vseh treh sklepov so vzporedne, delovni prostor SCARA robota je podoben valju.*



*Valjni delovni prostor je še bolj očiten pri **cilindrični roki**, ki je od tod dobila tudi ime. Robot ima eno rotacijsko in dve translacijski prostostni stopnji. Os drugega sklepa je vzporedna s prvo osjo, os tretjega sklepa pa je pravokotna na drugo.*

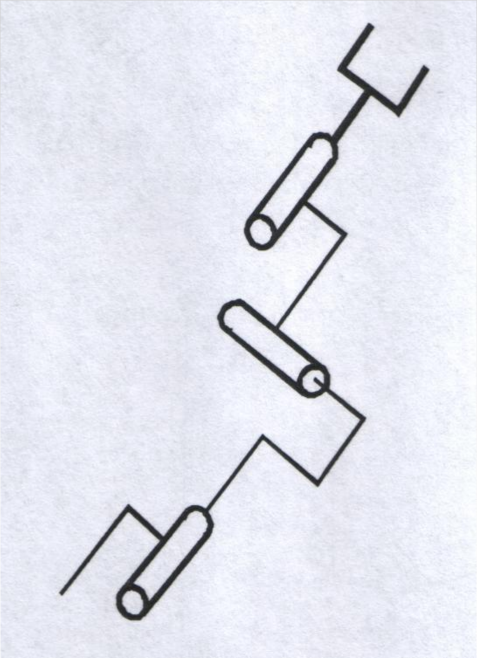


Kartezična roka *ima vse tri sklepe translacijske. Osi sklepov so paroma pravokotne. Kartezični roboti slovijo po visoki točnosti, posebna oblika stropnih robotov pa je primerna za prenašanje težkih bremen. Delovni prostor kartezičnih robotov je kvader.*



Robotsko zapestje in prijemalo

Naloga robotskega zapestja je zasukati predmet v poljubno orientacijo. Sklepi zapestja so vselej rotacijski. Segmenti zapestja morajo biti čim krajši. Proizvajalci robotov delajo zapestja, kjer se zdi, da gre za en sam krogelni sklep s tremi rotacijskimi prostostnimi stopnjami. Pri zapestjih se vse tri osi vrtenja sekajo. Na ta način zagotovimo analitičen izračun notranjih spremenljivk robota iz znane lege prijemala. V primerih uporabe robota, ko ne potrebujemo vseh šestih prostostnih stopenj ima lahko robotsko zapestje le dve ali celo eno samo rotacijsko prostostno stopnjo.



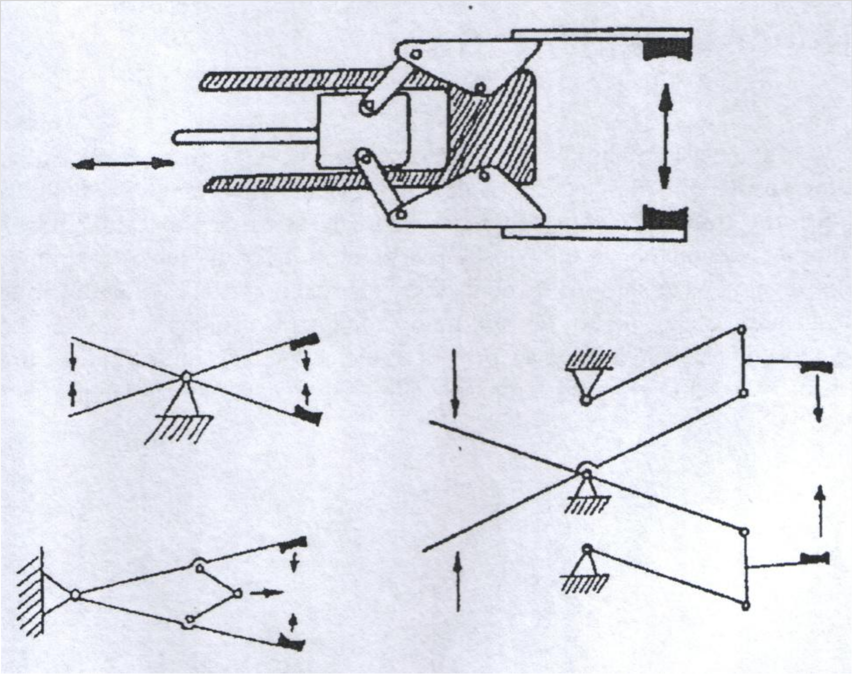
Robotsko zapestje in prijemalo

Robotsko prijemalo je zaključni segment robotskega manipulatorja. Včasih na vrhu robota ni pričvrščeno prijemalo, ampak, na primer, varilna glava ali pištola za razpršilno barvanje.

- *prijemala s prsti – z dvema ali z več prsti*
- *ostala prijemala – vakuumska, magnetna, perforacijska*

Velikokrat jih izdelujemo sami ter jih prilagodimo izdelku, ki ga prijemljemo.

Večkrat damo robotu tudi možnost, da med opravljanjem naloge preko posebnega sklopnika sam zamenjuje različna prijemala in orodja.



Kinematika je del mehanike, ki se ukvarja z gibanjem, ne da bi se zanimala za sile, ki so to gibanje povzročile. Gibanje opišemo s potjo, hitrostjo in pospeškom. V robotiki nas predvsem zanimata pot in hitrost. Oba parametra merimo s senzorji v sklepih robotov. V sklepih robota merimo pot kot zasuk rotacijskega sklepa ali razdaljo translacijskega sklepa. Spremenljivke v sklepih imenujemo tudi **notranje koordinate** robotskega mehanizma. Pozicijo in orientacijo zadnjega segmenta robota (trajektorijo) opisujejo **zunanje koordinate**. Preračunavanje zunanjih koordinat iz notranjih in obratno sta osrednja problema robotske kinematike.

- **Direktna kinematika** se ukvarja z računanjem položaja končne točke (vrha) manipulatorja iz notranjih koordinat manipulatorja.
- **Inverzna kinematika** določa notranje koordinate iz znanega položaja vrha manipulatorja.

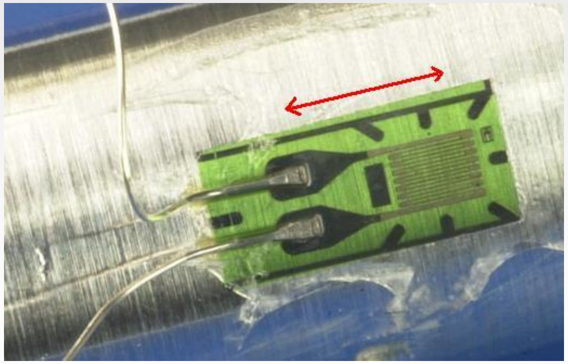
Delovni prostor predstavljajo vse točke, ki jih lahko doseže vrh robota. Igra pomembno vlogo pri izbiri robotskega mehanizma za dano nalogo.

Za razliko od kinematike je **dinamika** tisti del mehanike, ki se zanima za sile in navore, ki so povzročili gibanje mehanizma. Dinamiko uporabljamo pri modeliranju robotskih mehanizmov ter pri regulaciji robotov. Dinamične enačbe gibanja robota nam nudijo pomembne informacije (navori motorjev) za načrtovanje robotskih regulatorjev.

Senzorji

Senzorji (tipala, odjemniki) so »naprave«, ki veličine iz okolja (iz »realnega sveta«) pretvorijo v obliko, primerno za nadaljnjo obdelavo z elektronskimi vezji. Najpogostejše veličine iz okolja so temperatura, tlak, pretok, sila, navor, hitrost vrtenja, pot pomika, kot zasuka in druge. Izhodni signal senzorja je najpogosteje v obliki električne napetosti, upornosti ali toka. Senzorji nadomeščajo in dopolnjujejo človekova čutila.

Uporovni temperaturni senzor KTY10 uporabljamo za merjenje temperature, saj se mu s temperaturo spreminja električna upornost. Z nekaj dodatnimi elektronskimi elementi in napajanjem dobimo vezje, ki daje na izhodu temperaturno odvisno električno napetost.
Z računalnikom napetost zajamemo in jo računsko obdelamo, rezultat je številsko izražena zunanja temperatura. V celotni opisani merilni verigi je senzor prvi člen.



Uporovni raztezni merilni trak (angl. *strain gauge*). Na podlagi (zelene barve) ima naneseno uporovno plast v obliki serpentin. Če takšen trak nalepimo na podlago, ki je mehansko obremenjena v smeri serpentin, se spremeni upornost merilnega traku. Pri nategu se poveča, pri tlaku pa zmanjša.
Če merilni trak vključimo v ustrezno vezje, dobimo električni signal (napetost), ki je odvisna od obremenitve merjenca.
Na tem principu delujejo mnoge tehtnice vseh merilnih razponov - od gramskih do naprav za tehtanje tovornih vozil ali za testiranje mostovnih konstrukcij.

Primer tehtalne celice, v kateri so že vgrajeni uporovni merilni trakovi

Senzor za tlak.

Senzor, namenjen za merjenje vlage v zemlji

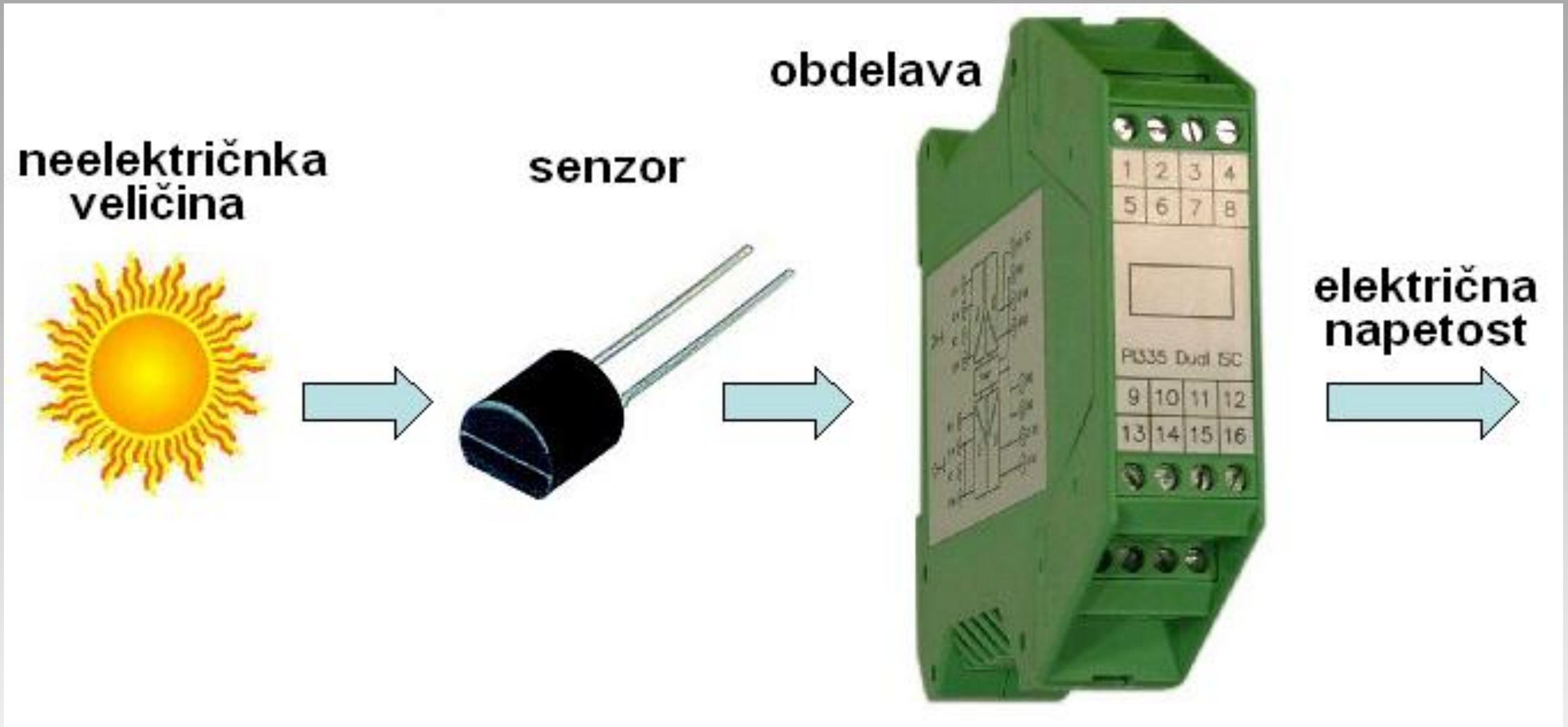
Pretvornik za merjenje hitrosti vetra.

<u>Priključitev senzorjev na računalnik</u>

Računalnik kot naprava je v bistvu zelo bogato elektronsko vezje oziroma množica takšnih vezij. Pri priključevanju naprav nanj moramo upoštevati pravila elektronike. Pravimo, da moramo zagotoviti združljivost na fizičnem nivoju.

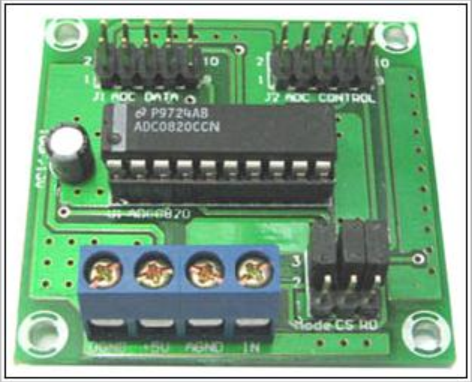
Če želimo signale iz senzorjev priključiti na računalnik, jih moramo najprej ustrezno »predelati«.

1. Pretvoriti jih moramo v električno napetost.
2. Električno napetost moramo pretvoriti v »digitalno« obliko.



Prvo nalogo – pretvorbo v električno napetost – opravijo senzorji in prilagodilna vezja:

- Senzor **pretvori** določeno fizikalno veličino v električno.
- Signal iz senzorja je lahko prešibek in ga je potrebno **ojačati**.
- Signal iz senzorja lahko ni sorazmeren s temperaturo. To odvisnost želimo **linearizirati**.
- V signalu iz senzorja je lahko preveč motenj in električnega šuma in ga je treba **filtrirati**.



Druga pomembna naloga – pretvorba napetosti v digitalno obliko – se imenuje **analogno-digitalna pretvorba**.

Osnovni podatki o pretvorniku

- oznaka in opis: ADC
- ločljivost: 8 bit0820, hitri 8-bitmi A/D pretvornik
- čas pretvorbe: 2,5 μs

Za **primer** lahko vzamemo mikrofon, priključen na računalnik. V nekem smislu je tudi mikrofon »senzor« - naprava, ki zvočni tlak pretvarja v električno napetost. Zvočna kartica lahko v prejeti napetosti razlikuje več kot 65000 različnih vrednosti (ločljivost 16-bitne kartice).
Za obdelavo nastalega električnega signala in njegovo predelavo v digitalno obliko poskrbi zvočna kartica. Ta seveda vsebuje potrebna prilagodilna elektronska vezja in analogno-digitalni pretvornik. Tipično se v sekundi izvede 44100 meritev električne napetosti in pretvorb v digitalno obliko.

Priključitev več senzorjev na računalnik

Pri velikem številu merjenih veličin – na primer v proizvodnem obratu ali raziskovalnem laboratoriju – se kaj kmalu zgodi, da je senzorjev več kot razpoložljivih »vhodov« na računalniku. Zato podatke iz večjega števila senzorjev povežemo najprej na napravo, ki podatke s senzorjev krožno bere, prebrane podatke pa sproti pošilja na izbrani »vhod« (vrata, port) računalnika. Takšnemu načinu prenašanja podatkov pravimo **multipleks**.

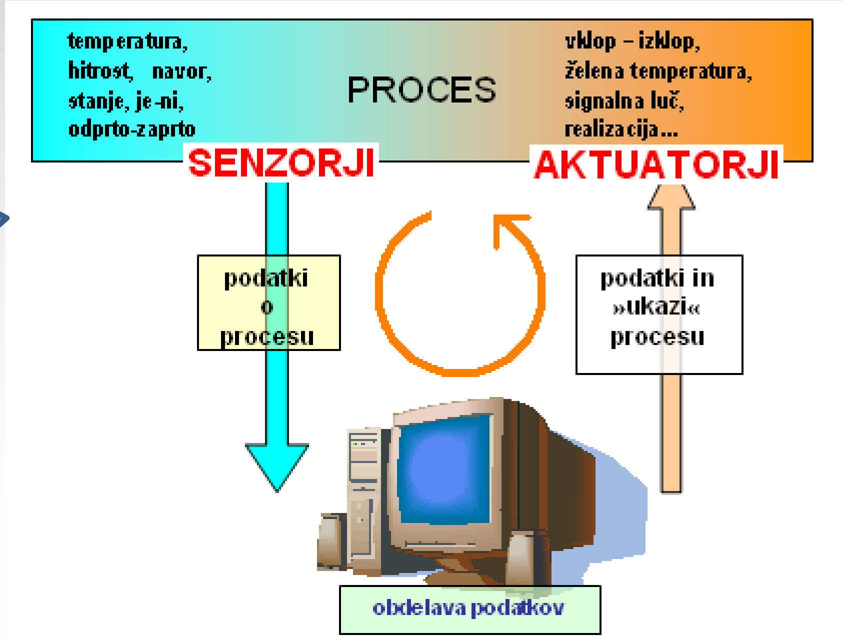
Aktuatorji

Aktuator je pretvornik, ki sprejme signal in ga pretvori v fizično akcijo, dejanje. To je mehanizem, preko katerega je mogoče vplivati oziroma učinkovati na okolico. Glede na uporabljeno tehnologijo so lahko električni, pnevmatični, hidravlični.

Pnevmatični cilinder uporablja za pogon stisnjen zrak. Za pomik bata zadošča krmiljenje ventila. Z pnevmatičnim cilindri izvajamo linearne pomike.

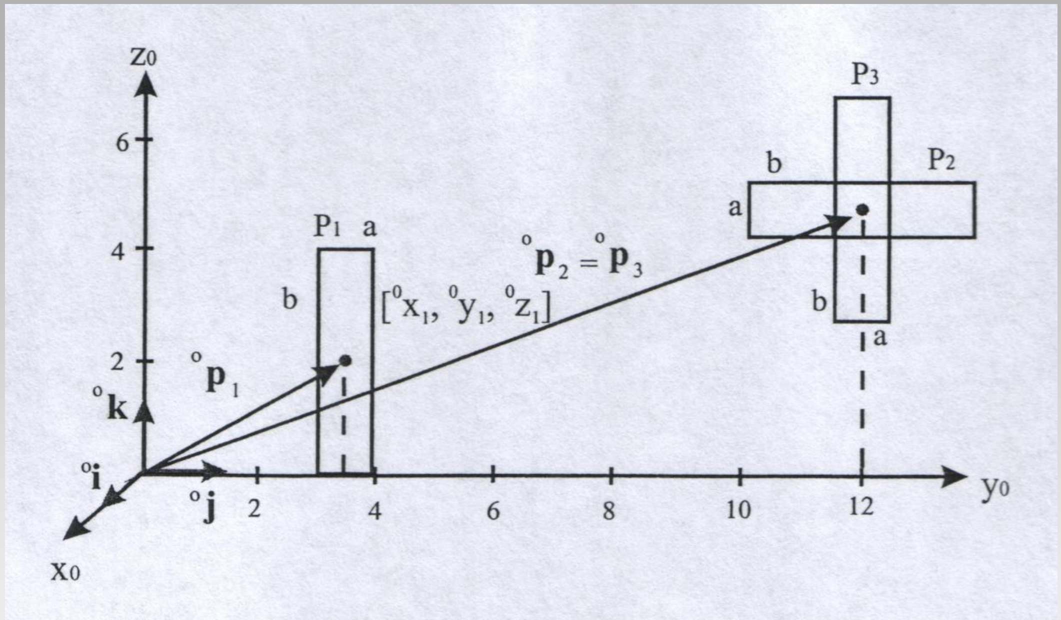
Primer aktuatorja z električnim pogonskim motorjem (ni viden, je vgrajen)

Slika na desni prikazuje mesto senzorjev in aktuatorjev v vodenju procesa. Senzorji so za nadzorni računalnik vir podatkov o sistemu, aktuatorji pa so "podaljšana roka" za izvajanje posegov v sistemu. S tem je "krog" zaključen: podatki o procesu - obdelava podatkov - odziv, ukrepanje.



Pri opisu gibanja predmeta v prostoru glede na izbrani referenčni koordinatni sistem ločimo dva pojma, ki podajata ***lego predmeta****:*

- *opis* ***pozicije predmeta*** *in*
- *opis* ***orientacije predmeta****.*

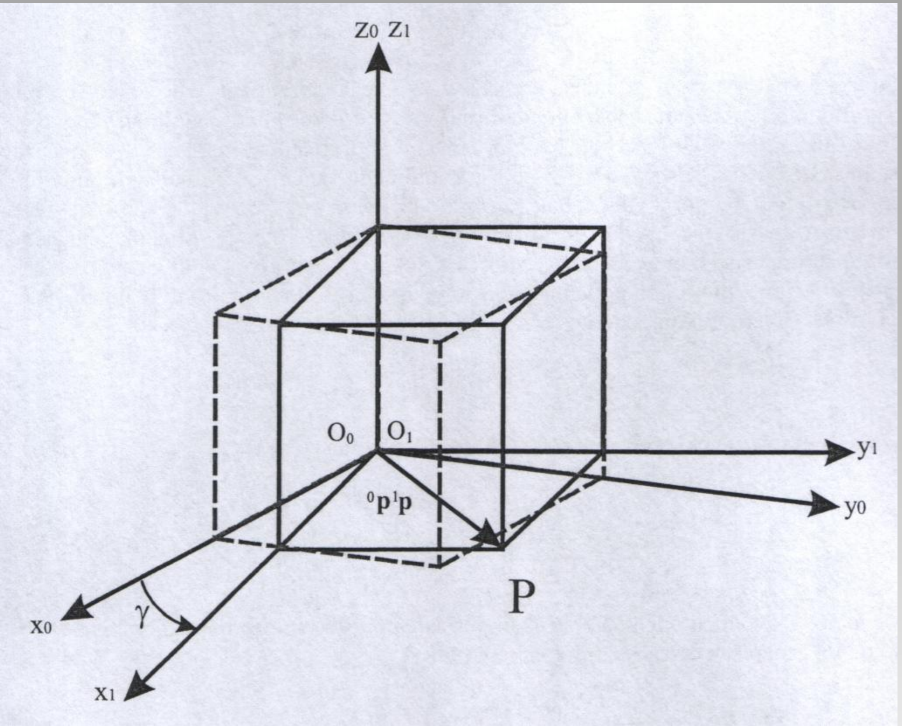


$$ {}^{0}\mathbf{p}_1 = {}^{0}x_1 {}^{0}\mathbf{i} + {}^{0}y_1 {}^{0}\mathbf{j} + {}^{0}z_1 {}^{0}\mathbf{k} $$

Pozicijo *predmeta bomo podajali s pomočjo vektorja* ***p****, ki poteka od izhodišča k.s. do točke, katere položaj želimo izraziti.* ${}^{0}\mathbf{i}$, ${}^{0}\mathbf{j}$ in ${}^{0}\mathbf{k}$ so enotski vektorji, ki pripadajo k.s. O_0. da bi prišli iz izhodišča O_0 v težišče predmeta P_1, moramo najprej translacijsko potovati za razdaljo ${}^{0}\mathbf{x}_1$ v smeri osi x_0, potem za ${}^{0}\mathbf{y}_1$ v smeri osi y_0 in končno še za ${}^{0}\mathbf{z}_1$ v smeri osi z_0.

Orientacija

*Za izražanje in opis **orientacije** sta pomembni smer in velikost rotacije okrog posamezne osi koordinatnega sistema. Orientacijo bomo označevali s simbolom **R**. velikost zasuka bomo podali s tremi koti oziroma z ustreznimi trigonometričnimi projekcijami na izbrani k.s.*



V pravokotnem koordinatnem sistemu O_0 z osmi $[x_0,y_0,z_0]$ se nahaja kocka. Izbranemu k.s. pripadajo enotski vektorji $[{}^0\mathbf{i},{}^0\mathbf{j},{}^0\mathbf{k}]$. V desnosučnem k.s. so pozitivne rotacije usmerjene v nasprotni smeri urinega kazalca. Na isti sliki je narisana nova lega kocke in vrisan vektor ${}^0\mathbf{p}$, ki povezuje izhodišče k.s. O_0 z ogliščem zavrtene kocke P. Kocka ima tudi lasten k.s., ki se je pred zasukom ujemal z izbranim k.s. O_0. To je k.s. O_1 z osmi $[x_1,y_1,z_1]$. Položaj oglišča P izrazimo v k.s. O_0 z vektorjem ${}^0\mathbf{p}$, ki ga opisuje naslednja enačba:

$$\boxed{{}^0\mathbf{p} = {}^0p_x\,{}^0\mathbf{i} + {}^0p_y\,{}^0\mathbf{j} + {}^0p_z\,{}^0\mathbf{k}}$$

Orientacija

V k.s. O_1 kaže v isto oglišče vektor $^1\mathbf{p}$:

$$^1\mathbf{p} = {}^1p_x{}^1\mathbf{i} + {}^1p_y{}^1\mathbf{j} + {}^1p_z{}^1\mathbf{k}$$

Vektorja $^0\mathbf{p}$ in $^1\mathbf{p}$ sta enaka, saj kažeta iz istega izhodišča v isto točko P. To enakost bomo uporabili, da bomo lahko ugotovili odnos med osmi koordinatnih sistemov O_0 in O_1. Zanima nas torej, kako opisati orientacijo k.s. O_1 v izbranem k.s. O_0. Matematični odnos med k.s. O_0 in O_1 dobimo tako, da posamezne komponente vektorja $^0\mathbf{p}$ izrazimo s komponentami vektorja $^1\mathbf{p}$.

$$^0p_x = {}^0\mathbf{p}{}^0\mathbf{i} = {}^1\mathbf{p}{}^0\mathbf{i} = {}^1p_x{}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{i} + {}^1p_y{}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{i} + {}^1p_z{}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{i}$$

$$^0p_y = {}^1p_x{}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{j} + {}^1p_y{}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{j} + {}^1p_z{}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{j}$$

$$^0p_z = {}^1p_x{}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{k} + {}^1p_y{}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{k} + {}^1p_z{}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{k}$$

Ali v matrični obliki:

$$^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p}$$

$$^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{i} & {}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{i} & {}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{i} \\ {}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{j} & {}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{j} & {}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{j} \\ {}^1\mathbf{i}{}^0\mathbf{k} & {}^1\mathbf{j}{}^0\mathbf{k} & {}^1\mathbf{k}{}^0\mathbf{k} \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{^1\mathbf{i}^0\mathbf{i}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{j}^0\mathbf{i}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{k}^0\mathbf{i}} \\ \cos\vartheta_{^1\mathbf{i}^0\mathbf{j}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{j}^0\mathbf{j}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{k}^0\mathbf{j}} \\ \cos\vartheta_{^1\mathbf{i}^0\mathbf{k}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{j}^0\mathbf{k}} & \cos\vartheta_{^1\mathbf{k}^0\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

Orientacija

Enako lahko iz znanih koordinat točke P v k.s. O_0 določimo položaj točke P v k.s. O_1:

$$\boxed{{}^1p_x = {}^1\mathbf{p}\,{}^1\mathbf{i} = {}^0\mathbf{p}\,{}^1\mathbf{i} = {}^0p_x\,{}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{i} + {}^0p_y\,{}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{i} + {}^0p_z\,{}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{i}}$$

Podobno bi zapisali še izraza za ${}^1p_y$ in ${}^1p_z$, tako da v strnjeni obliki lahko zapišemo matrično enačbo:

$$\boxed{{}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_0\,{}^0\mathbf{p}}$$

$${}^1\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{i} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{i} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{i} \\ {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{j} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{j} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{j} \\ {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{k} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{k} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{k} \end{bmatrix}$$

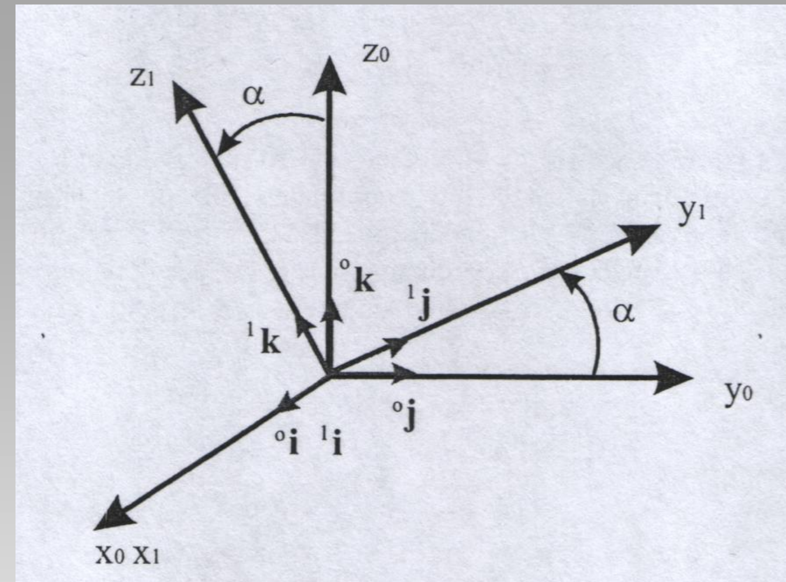
Matrika ${}^1\mathbf{R}_0$ je inverzna transformacija matrike ${}^0\mathbf{R}_1$. Ker je skalarni produkt komutativen (${}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{j} = {}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{i}$), lahko zapišemo naslednjo enakost:

$$\boxed{{}^1\mathbf{R}_0 = ({}^0\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^0\mathbf{R}_1)^T}$$

Matriki, katere inverzna matrika je enaka transponirani matriki, pravimo ortogonalna matrika. Transformacijsko matriko ${}^1\mathbf{R}_0$ bomo zato imenovali ortogonalna transformacijska matrika. Ortogonalne matrike z vrednostjo determinante +1 ali -1 bomo imenovali rotacijske matrike in jih bomo uporabljali za podajanje orientacije ali rotacije.

Orientacija

Izračun rotacijske matrike za zasuk +α okrog osi x_0. Opravka imamo z naslednjimi od nič različnimi produkti enotskih vektorjev:



$${}^{0}\mathbf{i}\,{}^{1}\mathbf{i} = \cos(0) = 1$$
$${}^{0}\mathbf{j}\,{}^{1}\mathbf{j} = \cos \alpha$$
$${}^{0}\mathbf{k}\,{}^{1}\mathbf{k} = \cos \alpha$$
$${}^{0}\mathbf{j}\,{}^{1}\mathbf{k} = \cos(90+\alpha) = -\sin \alpha$$
$${}^{0}\mathbf{k}\,{}^{1}\mathbf{j} = \cos(90-\alpha) = \sin \alpha$$

Rotacijsko matriko tako zapišemo v naslednji obliki:

$${}^{0}\mathbf{R}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$${}^{0}\boldsymbol{R}_{1} = \boldsymbol{R}_{x,\alpha}$$
$$\boldsymbol{R}_{x,\alpha 1}\,\boldsymbol{R}_{x,\alpha 2} = \boldsymbol{R}_{x,\alpha 1+\alpha 2}$$
$$\boldsymbol{R}_{x,\alpha}^{-1} = \boldsymbol{R}_{x,-\alpha}$$

V primeru čiste transformacije:

$$\mathbf{R}_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrično množenje ni komutativno. Vektor, ki ga želimo izraziti v zasukanem koordinatnem sistemu, moramo premultiplicirati z rotacijsko matriko $^0\mathbf{R}_1$. ob upoštevanju tega pravila, lahko izpeljemo izraz za zaporedne rotacije in tako sestavimo učinke posameznih rotacij. Zamislimo si točko P, ki je izražena v treh koordinatnih sistemih z vektorji $^0\mathbf{p}$, $^1\mathbf{p}$ in $^2\mathbf{p}$. Zveza med posameznimi vektorji je podana z naslednjimi enačbami:

Zaporedne rotacije

$$^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p}$$
$$^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{p}$$

$$^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{p}$$
$$^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_2$$

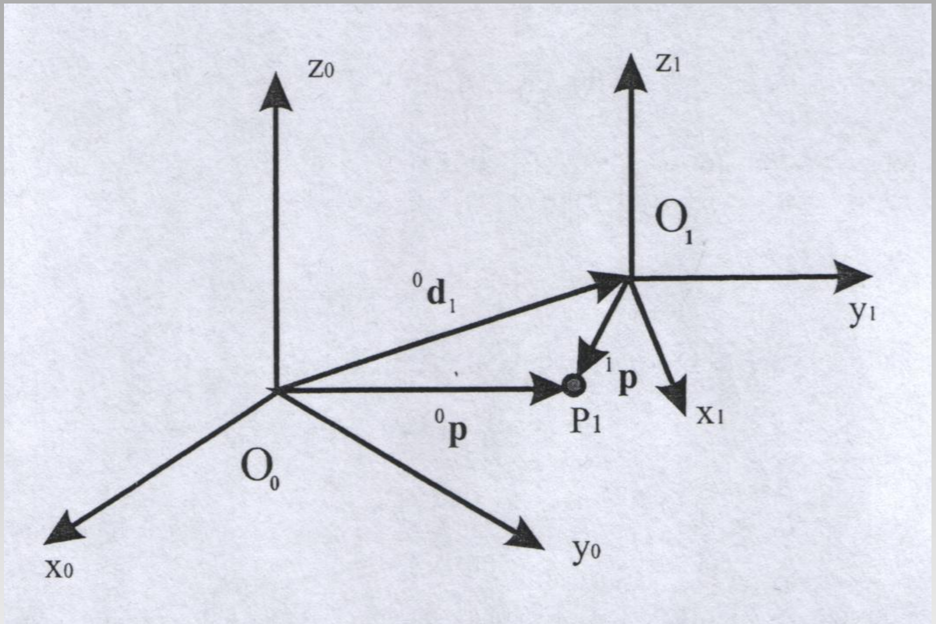
$$^0\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_2 \ldots {}^{n-1}\mathbf{R}_n$$

Iz enačb lahko razberemo, da so rotacijski zapisi glede na naraščajoče število zaporednih rotacij postmultiplicirani.

Kadar transformacijski zapis sestavimo iz zaporednih rotacij (transformacij) tako, da postmultipliciramo matrike vsake naslednje rotacije, potem se te operacije nanašajo na vsakokratni relativni trenutni koordinatni sistem.

Lega

Izhodišči koordinatnih sistemov O_0 in O_1 sedaj ne sovpadata, koordinatna sistema pa sta razmaknjena za razdaljo $^0\mathbf{d}_1$. V k.s. O_1 se nahaja točka P_1, do katere kaže vektor $^1\mathbf{p}$ s koordinatami $[^1x, ^1y, ^1z]$. Naša naloga je določiti položaj izbrane točke v koordinatnem sistemu O_0. V primeru da sta koordinatna sistema vzporedna lahko zapišemo naslednjo enačbo:



$$\boxed{^0\mathbf{p} = {}^1\mathbf{p} + {}^0\mathbf{d}_1}$$

V primeru, da je k.s. O_1 v odnosu na k.s. O_0 še poljubno zasukan, pa lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$\boxed{^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p} + {}^0\mathbf{d}_1}$$

Opis gibanja, v katerem nastopa rotacijska transformacija skupaj s translacijsko, imenujemo splošni opis lege.

Izberimo dve takšni legi: $\boxed{{}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p} + {}^0\boldsymbol{d}_1}$ *in* $\boxed{{}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p} + {}^1\boldsymbol{d}_2}$

Poiskati moramo tisto sestavljeno lego oziroma transformacijo, ki bo nadomestila zgornji transformaciji:

$$\boxed{{}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{d}_2 + {}^0\boldsymbol{d}_1}$$

Zapis predstavlja transformacijo med vektorjema ${}^2\mathbf{p}$ *in* ${}^0\mathbf{p}$ *ter ga bomo zato prilagodili glede na pravi zapis lege:*

$$\boxed{{}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p} + {}^0\boldsymbol{d}_2}$$

Iz primerjav izrazov vidimo, da veljata naslednji enačbi:

$$\boxed{{}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1\, {}^1\mathbf{R}_2} \quad \textit{in} \quad \boxed{{}^0\boldsymbol{d}_2 = {}^0\boldsymbol{d}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{d}_2}$$

Prva enačba nam je že znana, druga pa pravi, da lahko translacijske vektorje seštejemo, če jih izrazimo v istem koordinatnem sistemu. Vektor ${}^1\mathbf{d}_2$*, ki povezuje izhodišči* O_1 *in* O_2 *moramo torej izraziti v k. sistemu* O_0*, kar zagotovimo s tem, da vektor* ${}^1\mathbf{d}_2$ *premultipliciramo z rotacijsko matriko* ${}^0\mathbf{R}_1$ *in tako postavimo k.s.* O_1 *kot da bi bil vzporeden s k.s.* O_0*. Zgornji enačbi lahko v matrični obliki zapišemo takole:*

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2 & {}^1\boldsymbol{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 & {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{d}_2 + {}^0\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lega

Splošno lego ${}^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R}\,{}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d}$ *lahko torej zapišemo v naslednji matrični obliki:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H *matriko imenujemo homogena transformacija, ker homogenizira oziroma združuje rotacijsko in translacijsko transformacijo v eni matriki. Zaradi ortogonalnosti matrike* **R** *lahko enostavno zapišemo tudi inverzno matriko* $\mathbf{H}^{-1}$*:*

$$\boxed{{}^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R}\,{}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d}}$$

$$\boxed{{}^{1}\mathbf{p} = \mathbf{R}^{T}\,{}^{0}\mathbf{p} - \mathbf{R}^{T}\mathbf{d}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{T} & -\mathbf{R}^{T}\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podobno kot smo zaporedne rotacije zapisali s postmultiplikacijo rotacijskih matrik, zaporedne lege lahko opišemo s postmultiplikacijo homogenih transformacij:

$${}^{0}\mathbf{H}_{2} = {}^{0}\mathbf{H}_{1}\,{}^{1}\mathbf{H}_{2}$$

$${}^{0}\mathbf{H}_{n} = {}^{0}\mathbf{H}_{1}\,{}^{1}\mathbf{H}_{2} \ldots {}^{n-1}\mathbf{H}_{n}$$

Ker tudi vektorje lahko pišemo v obliki $\begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$ *dobimo naslednji homogeni matematični izraz:*

$$\boxed{\begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Primer:

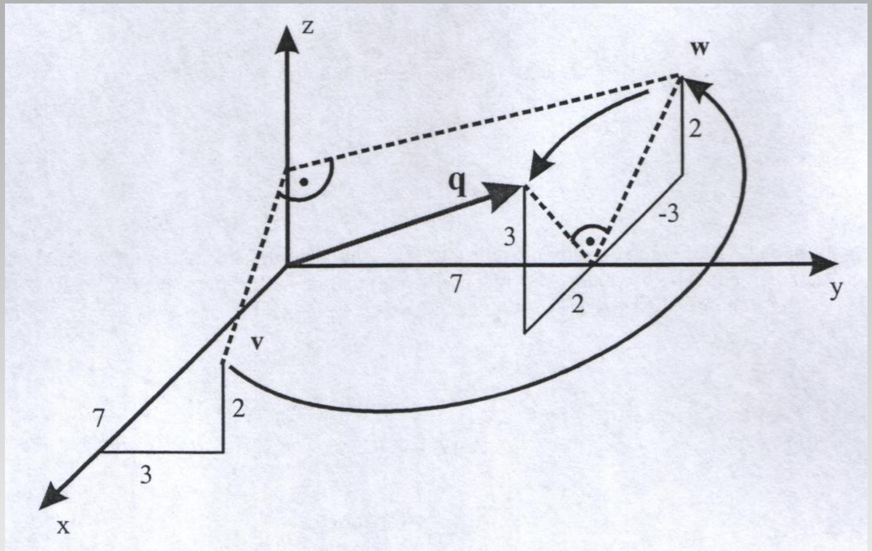
Za homogeno transformacijo je značilno, da lahko nek element (točko, vektor, lik itn.) poljubno krat transformiramo – preslikujemo. Vzemimo vektor **v** *in opravimo najprej rotacijo za 90°* okrog z in potem še okrog y osi:

$\mathbf{v} = [7,3,2,1]^T$

1. rotacija → $\mathbf{w} = \mathbf{Rot}(z,90)\ \mathbf{v}$

2. rotacija → $\mathbf{q} = \mathbf{Rot}(y,90)\ \mathbf{w}$

$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}(y,90)\ \mathbf{Rot}(z,90)\ \mathbf{v}$



Primer dvakratne rotacije

$$\mathbf{Rot}(y,90)\ \mathbf{Rot}(z,90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primer:

Če prejšnjemu primeru dveh rotacij dodamo še translacijo točke za nek vektor **Trans**$(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$*, dobimo:*

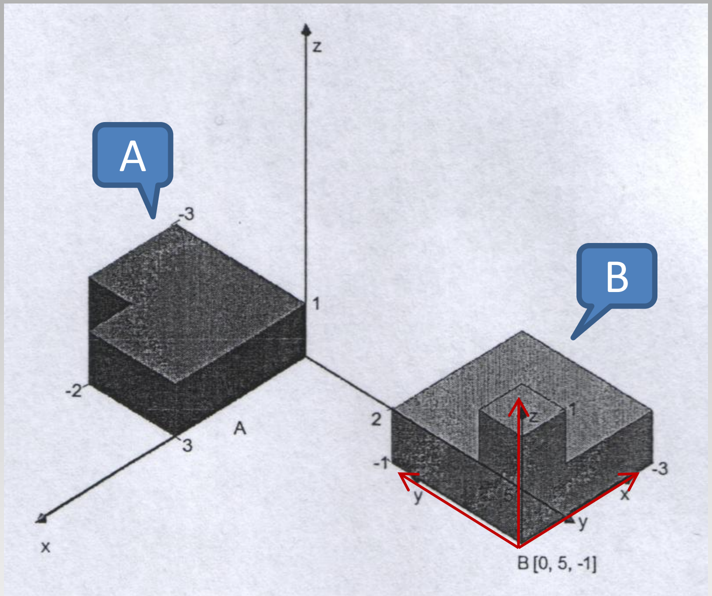
$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{Trans}(4,-3,7)\ \mathbf{Rot}(y,90)\ \mathbf{Rot}(z,90)$$

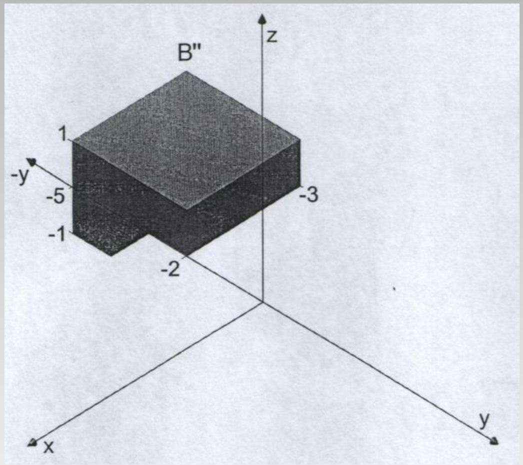
$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

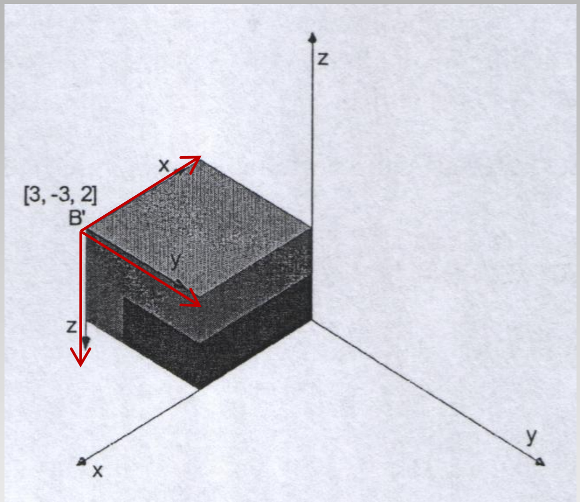
Če sedaj s tako dobljeno transformacijo nek vektor $\mathbf{v} = 7\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ *ali točko (7,3,2) transformiramo, bomo to točko najprej rotirali za 90 stopinj okoli osi z, nato za 90 stopinj okoli y in nato še translacijsko premaknili za (4,-3,7) ter bomo kot rezultat dobili točko* **x**.

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_1\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vaja: *Ogledali si bomo primer dveh teles A in B v prostoru, kot ga prikazuje slika. Cilj naloge je, da predmet B prestavimo v novo lego B' na predmetu A, tako da se predmeta ujemata.*







Premik glede na referenčni koordinatni sistem:

Izberemo poljubno zaporedje premikov, pri katerem predmet B najprej zasučemo za 180° okrog osi x referenčnega k.s. dobimo novo lego predmeta B". Do končne lege B' bomo sedaj prišli s samimi translacijskimi premiki. Predmet B" najprej dvignemo za vsaj 1 v smeri z, da se ne bomo zaleteli v predmet A, potem z njim drsimo po predmetu A za 3 v smeri x in na koncu še predmet premaknemo za 2 v smeri y.

Premiki teles v prostoru

Ker gre z transformacijo v referenčnem koordinatnem sistemu, zapišemo premike v obratnem vrstnem redu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Trans}(3,2,1)\ \mathbf{Rot}(x,180)$$

Transformacijo zapišemo še s pripadajočima homogenima transformacijskima matrikama:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če želimo izračunati končno lego predmeta B', moramo predmetu B predpisati poljuben koordinatni sistem. Relativni k.s. pripnemo na telo B v vogalu [0,5,-1]. Lego predmeta B opisuje naslednja homogena transformacija:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

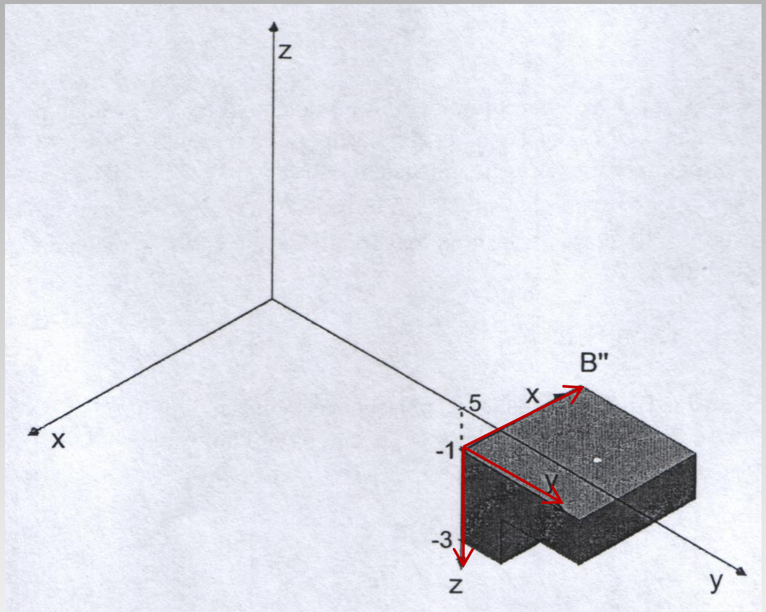
Lego B' dobimo s premultiplikacijo matrike B z matriko T

$$\mathbf{B'} = \mathbf{T}\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Premiki teles v prostoru

Premik glede na relativni koordinatni sistem, ki je pripet na predmet B:

Predmet B spet zavrtimo za 180°, vendar sedaj okoli osi x, ki poteka vzdolž roba predmeta B. Tako dobimo novo lego predmeta B":



Iz lege B" lahko pridemo v končno lego B' s samimi translacijskimi pomiki. Da se izognemo predmetu A, moramo predmet B" dvigniti za 4 enote. Naprej opravimo torej translacijo za -4 vzdolž osi z, potem drsimo s predmetom za -8 vzdolž osi y ter predmet poravnamo za -3 vzdolž osi x. Končno predmet spustimo za 1 enoto oziroma ga premaknemo za 1 vzdolž osi z.

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}(x,180)\ \mathbf{Trans}(-3,-8,-3)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B'} = \mathbf{B\ T}$$

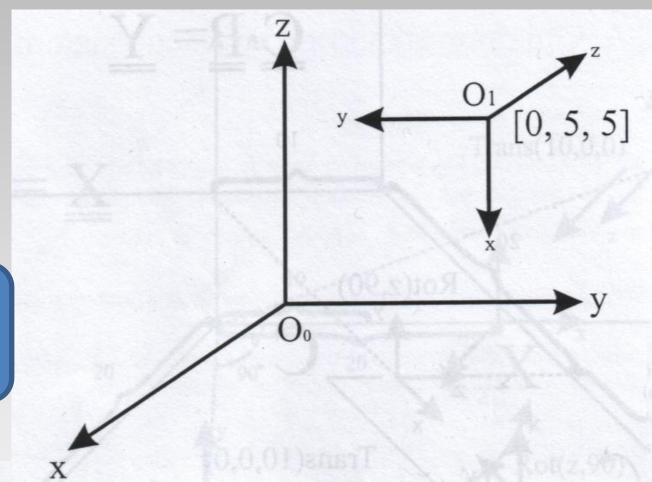
$$\mathbf{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lego B' dobimo s postmultiplikacijo matrike B z matriko T

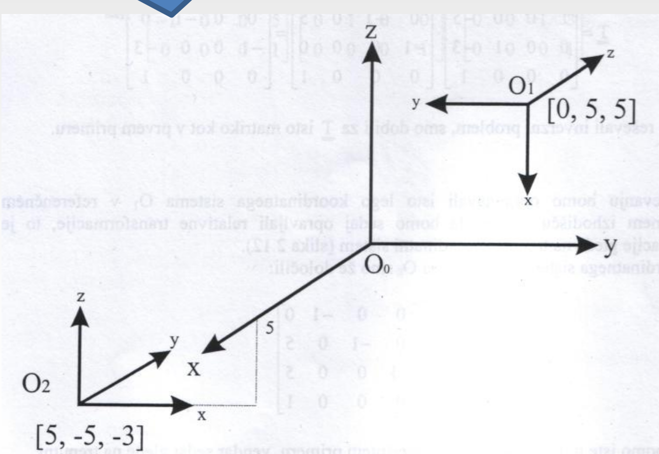
Premiki teles v prostoru

Naloga: *Transformacija v referenčnem in relativnem koordinatnem sistemu. Naloga zahteva, da najprej:*

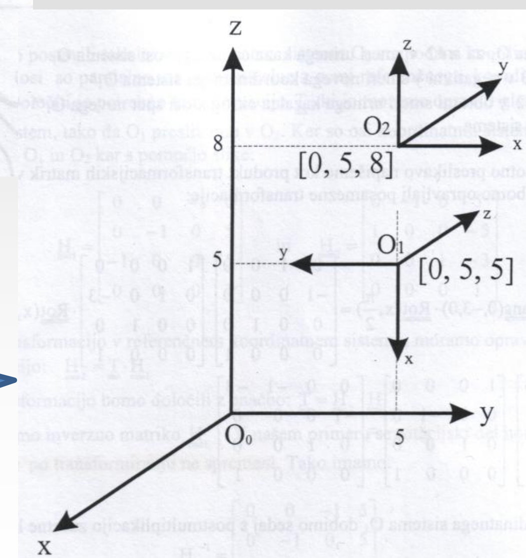
- *zasučemo O_1 za 90° v smeri urinega kazalca okrog z osi*
- *opravimo translacijo z 3 v negativni y smeri*
- *rotacijo za 90° v obratni smeri urinega kazalca okrog x osi.*



Transformacija glede na referenčni koordinatni sistem



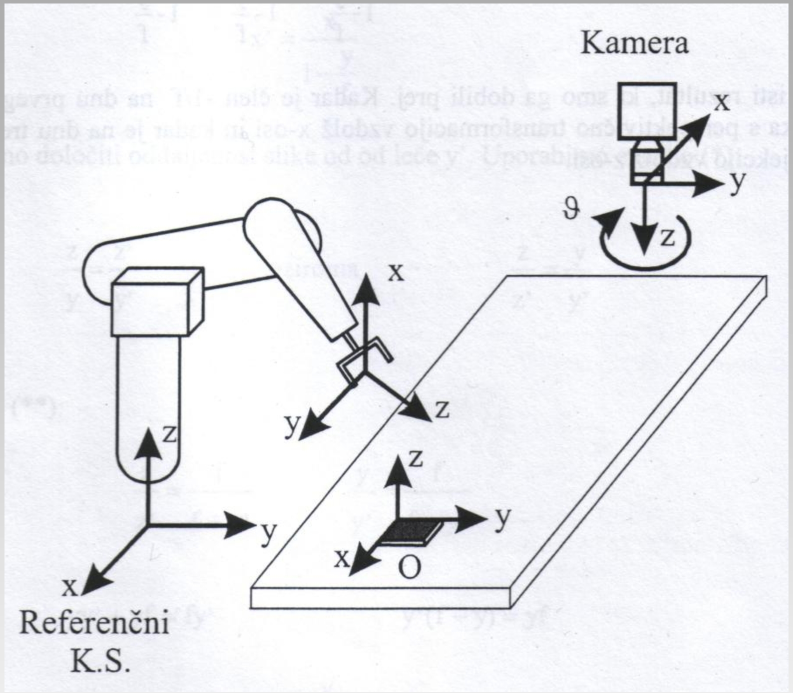
Relativna transformacija



Uporaba homogenih transformacij

***Celica z robotskim vidom*:**

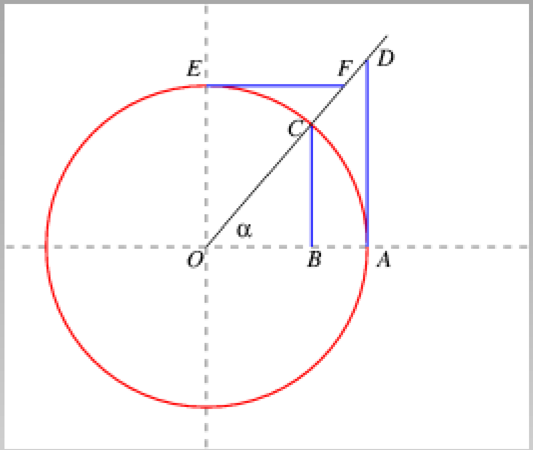
Na sliki je delovno mesto, ki ga nadzira kamera. Položaj kamere najprej kalibriramo glede na manipulator, potem pa s pomočjo kamere lociramo posamezne predmete. Kamera je postavljena tako, da je objektiv usmerjen vertikalno navzdol v smeri –z osi referenčnega k.s. Razdalja od kamere do delovne površine naj bo 100 cm. Če sta koordinatna sistema objekta in kamere poravnana, kot je prikazano na sliki, lahko zapišemo homogeno transformacijo, ki opisuje lego predmeta glede na kamero. To matriko množimo s homogeno transformacijo, ki upošteva zasuk predmeta na mizi. Pozitiven zasuk okoli z osi k.s. objekta je negativen glede na kamero:



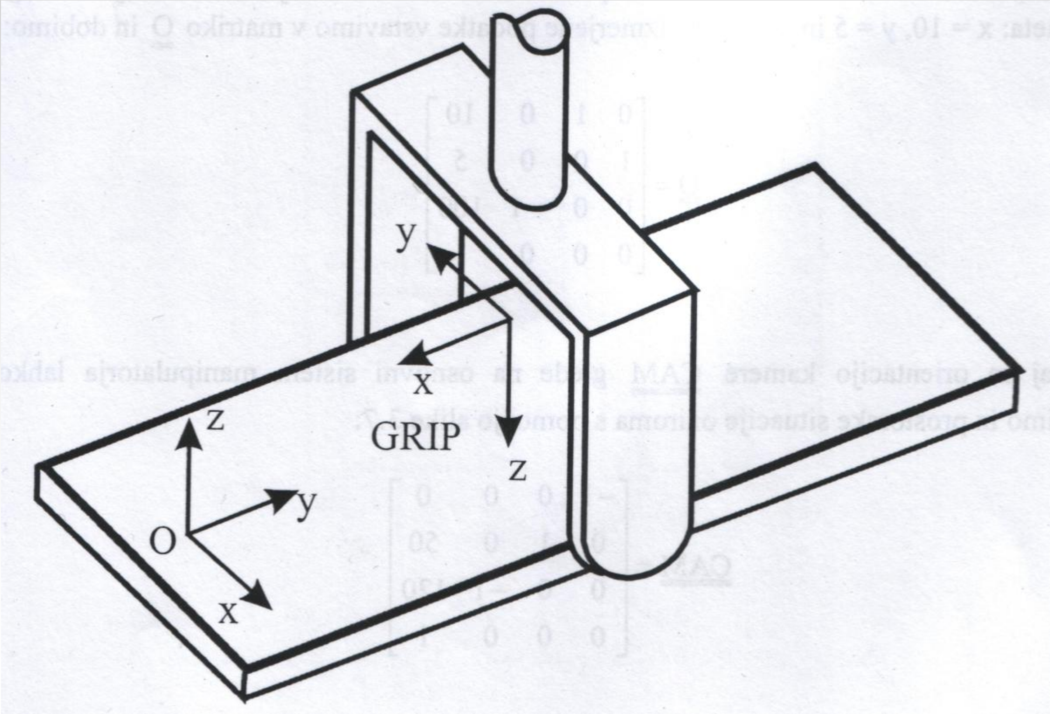
$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) & 0 & 0 \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 & x \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uporaba homogenih transformacij

Celica z robotskim vidom:



V matriki je ϑ rotacija slike okoli osi objektiva, x in y pa predstavljata translacijo predmeta, kot ga vidi kamera. Prvi trije stolpci homogene transformacije predstavljajo smeri treh enotskih vektorjev v k.s. objekta glede na osi k.s. kamere. Četrti stolpec opisuje pozicijo predmeta.



Celica z robotskim vidom:

Pozicijo in orientacijo vrha manipulatorja (tretjega segmenta T3) glede na osnovni sistem manipulatorja dobimo z naslednjim množenjem matrik:

$$\mathbf{T3} = \mathbf{CAM} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{GRIP}$$

T3 predstavlja lego, v kateri bo prijemalo GRIP lahko zagrabilo predmet O. Ker pa lego predmeta O pozna le kamera CAM, moramo T3 izraziti preko zgornje enačbe. GRIP predstavlja lego prijemala glede na predmet O v trenutku, ko ta predmet prijemalo lahko prime.

$$\mathbf{GRIP} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadnji stolpec v matriki pomeni, da je razdalja v smeri x (k.s. predmeta) med prijemalom in objektom enaka nič, torej je prijemalo na tem, da prime predmet. Štirica pomeni, da prijemalo prijema predmet za 4 cm stran od izhodišča k.s. predmeta, dvojka pa pomeni vertikalno razdaljo med izhodiščema k.s. predmeta in prijemala.

Recimo, da smo na osnovi slike predmeta iz kamere dobili naslednjo informacijo o legi predmeta: x = 10, y = 5 in ϑ = -90°. Izmerjene podatke vstavimo v matriko O:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Celica z robotskim vidom:

Pozicijo in orientacijo kamere CAM glede na osnovni sistem manipulatorja lahko določimo iz prostorske situacije oziroma s pomočjo slike:

$$\mathbf{CAM} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

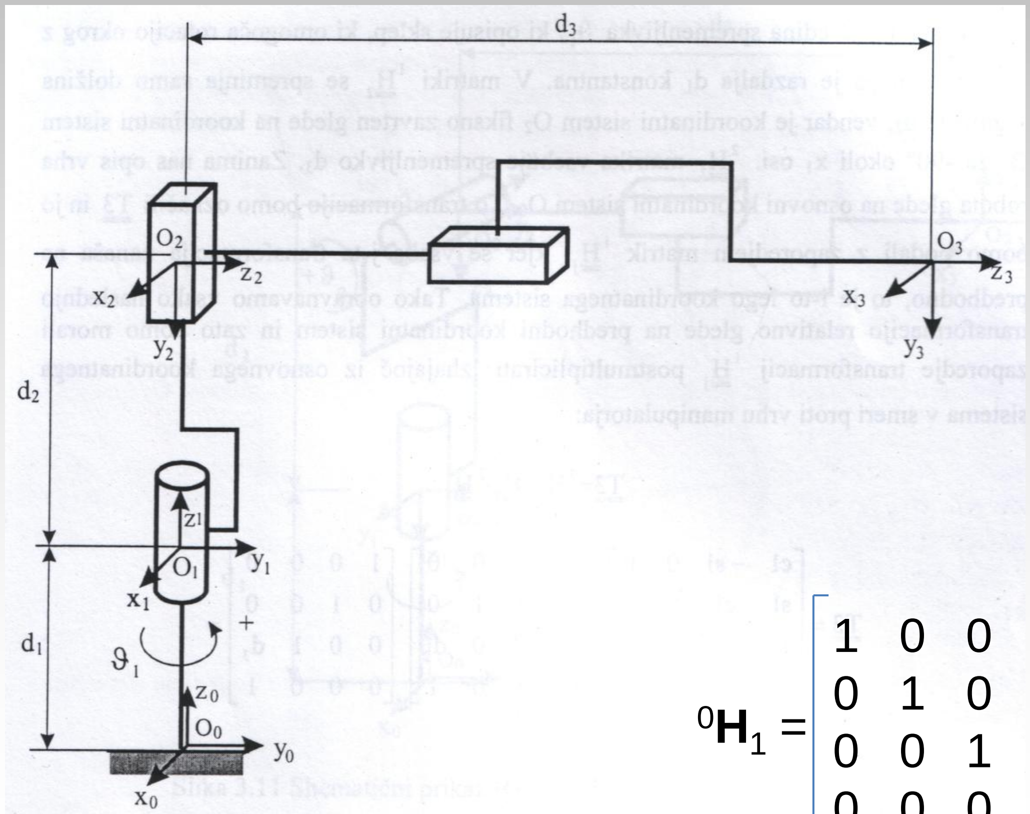
Kamera je torej pomaknjena za 50 cm v desno (v pozitivni smeri y) in za 120 cm nad osnovnim segmentom manipulatorja. Sedaj lahko izračunamo lego vrha manipulatorja, v katero moramo pripeljati tretji segment, tako da bo prijemalo lahko zagrabilo predmet:

$$\mathbf{T3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & -1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RTT robotski manipulator:

Robot je sestavljen iz rotacijskih in translacijskih sklepov ter iz segmentov. Seveda je robot tudi fizično izdelan in ima torej vsak segment in vsak sklep dane fizične izmere in lastnosti. Tako imamo opravka z naslednjima spremenljivkama:

- *kot sklepa, ki ga oklepata sosednja segmenta*
- *dolžina sklepa, ki ni odvisna od kota v sklepu*



Cilindrični robotski mehanizem sestavljajo mirujoča osnova, rotacijski sklep ϑ_1, translacijski sklep d_2 in translacijski sklep d_3. Homogeno transformacijo, ki preslika O1 v O0, dobimo s postmultiplikacijo matrike, ki opisuje razdaljo od osnove do prvega sklepa, z matriko, ki opisuje rotacijsko delovanje prvega sklepa

$$
{}^{0}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

RTT robotski manipulator:

Drugi sklep je translacijski, spremenljivka je d_2:

$$^{1}\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tretji sklep je prav tako translacijski, spremenljivka je d_3:

$$^{2}\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nas zanima opis vrha robota glede na osnovni k.s. O_0. To transformacijo bomo označili ***T3*** *in jo bomo izračunali s postmultiplikacijo matrik* ***H****:*

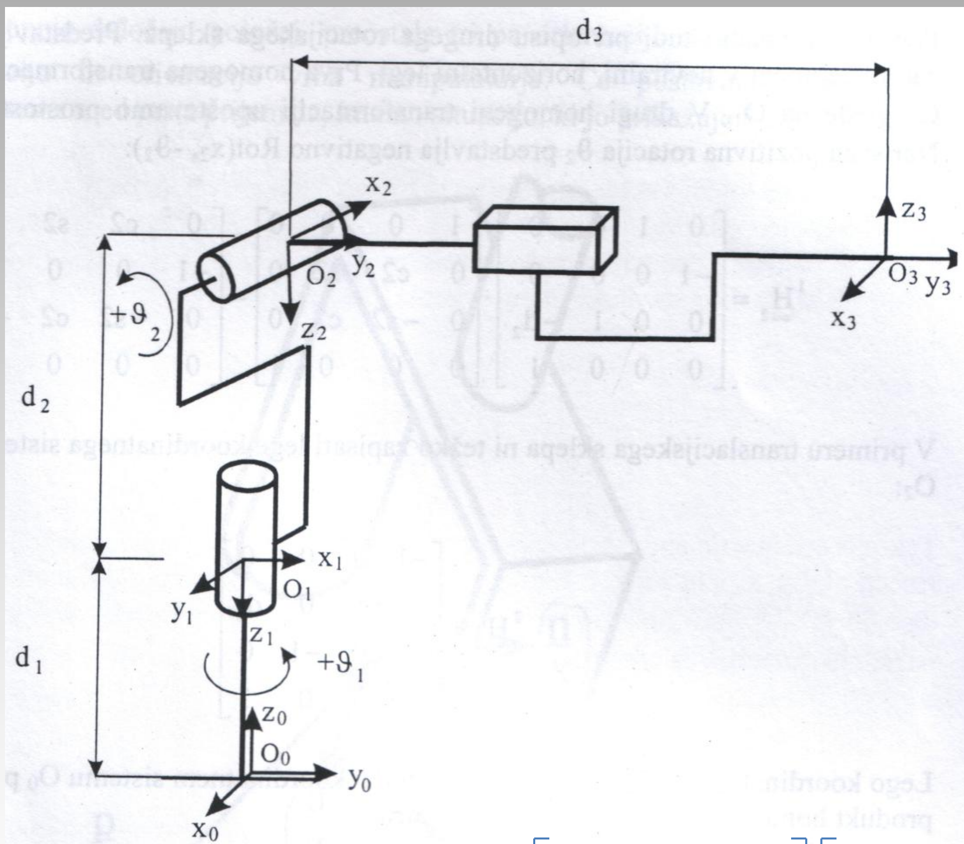
$$\mathbf{T3} = {}^{0}\mathbf{H}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{H}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika ***T3*** *podaja opis lege vrha manipulatorja (k.s. O_3) glede na osnovni k.s. O_0, oziroma opisuje direktni geometrijski problem robota.*

Uporaba homogenih transformacij

RRT robotski manipulator:

RRT roka ima dva rotacijska sklepa ϑ_1 in ϑ_2 ter en translacijski sklep d_3.



Najprej napišemo homogeno transformacijsko matriko, ki preslika k.s. O_1 v referenčni k.s. O_0. Preslikavo zapišemo v dveh korakih, ki predstavljata relativne pomike in zasuke. Najprej predpostavimo, da prvi sklep miruje v narisani legi in zapišemo lego O_1 glede na O_0. V drugem koraku upoštevamo prostostno stopnjo ϑ_1. Pozitivna smer rotacije okrog z_1 je ravno nasprotna narisani pozitivni smeri kota sklepa ϑ_1, tako da moramo zapisati matriko za $Rot(z_1,-\vartheta_1)$:

$$
{}^{0}\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

RRT robotski manipulator:

Podobno ravnamo tudi pri opisu drugega rotacijskega sklepa. Narisana pozitivna rotacija ϑ_2 predstavlja negativno Rot(x_2,-ϑ_2):

$$^1\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 & s_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 & c_2 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tretji sklep je translacijski, spremenljivka je d_3:

$$^2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Lego k.s. O_3 v referenčnem k.s. O_0 podaja produkt homogenih transformacijskih matrik **H**:*

$$\mathbf{T3} = {}^0\mathbf{H}_1 \cdot {}^1\mathbf{H}_2 \cdot {}^2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1c_2 & s_1s_2 & -s_1c_2d_3 \\ s_1 & c_1c_2 & -c_1s_2 & c_1c_2d_3 \\ 0 & s_2 & c_2 & d_1+d_2+s_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Če ohranimo legi k.s. O_0 in O_3 in poljubno spreminjamo legi k.s. O_1 in O_2, bomo vselej dobili isto matriko **T3**, ki opisuje direktni geometrijski problem manipulatorja.*

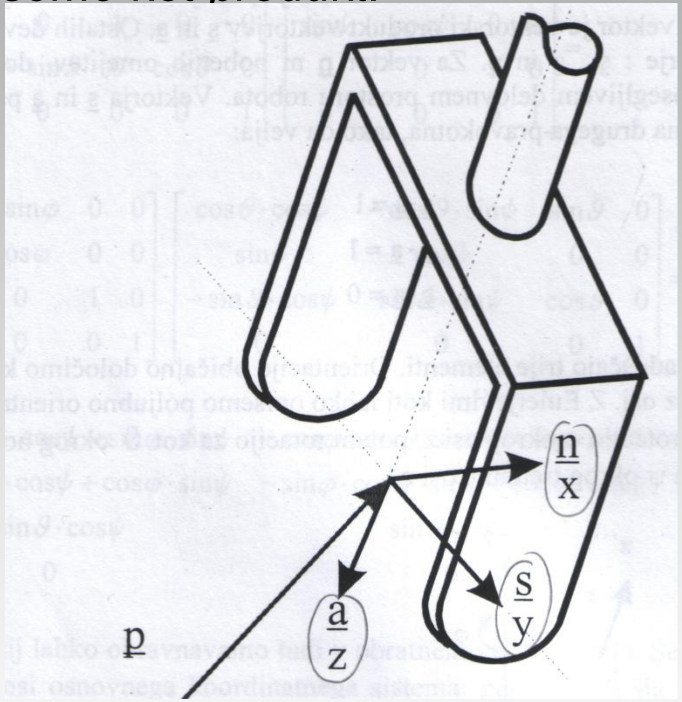
Uporaba homogenih transformacij

Robotsko prijemalo:

Robotski manipulatorji imajo večinoma šest prostostnih stopenj. Na ta način lahko zadnji segment (prijemalo robota) pripeljemo v poljubno pozicijo in orientacijo. Enačbo vrha robotskega manipulatorja lahko zapišemo kot produkt:

$$\mathbf{T6} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{H}_{2} \cdot {}^{2}\mathbf{H}_{3} \cdot {}^{3}\mathbf{H}_{4} \cdot {}^{4}\mathbf{H}_{5} \cdot {}^{5}\mathbf{H}_{6}$$

Tri prostostne stopnje določajo pozicijo, preostale tri pa orientacijo. Matrika T6 tako predstavlja pozicijo in orientacijo vrha manipulatorja. Če postavimo izhodišče k.s. med prsta prijemala, dobimo naslednjo situacijo:



Pozicija izhodišča k.s. je podana z vektorjem **p**. *Trije enotski vektorji* **n**, **s** *in* **a** *opisujejo orientacijo prijemala. Vektor z osi leži v smeri, v kateri se prijemalo približuje predmetu. Označimo ga z vektorjem* **a** *(approach). Vektor v smeri osi y podaja drsenje prstov prijemala in ga označimo kot* **s** *(slide). Tretji vektor zaključuje desnosučni k.s. in ga imenujemo normalni:* **n** = **s** x **a.**

Robotsko prijemalo:

Transformacijska matrika T6 ima elemente, ki jih že poznamo:

$$\mathbf{T6} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

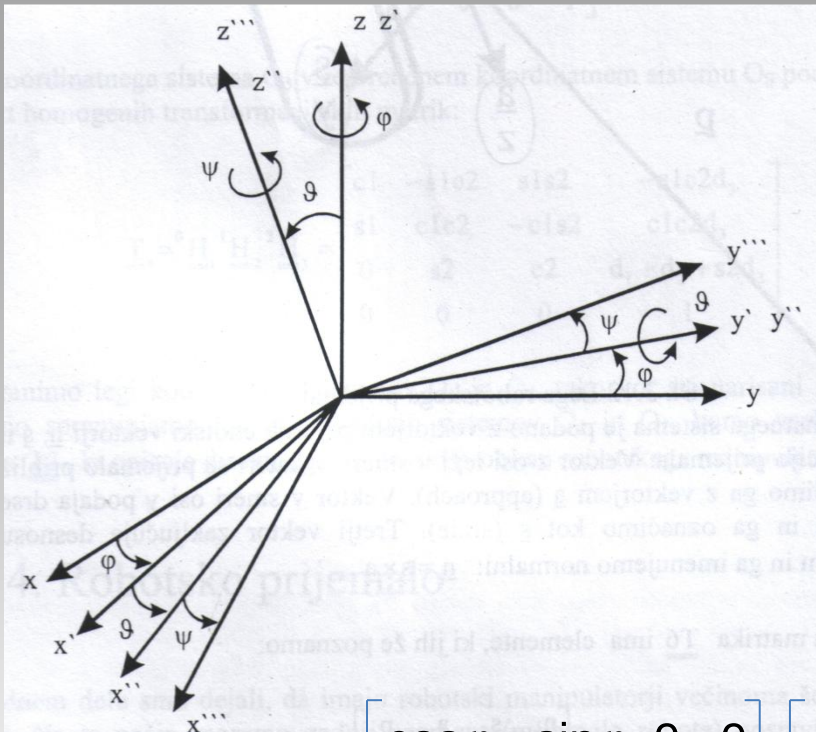
Orientacija: Matrika T6 robotskega manipulatorja je povsem določena tedaj, ko poznamo njenih 12 elementov. Levi stolpčni vektor ***n*** *je vektorski produkt vektorjev* ***s*** *in* ***a****, ostalih devet elementov pa predstavlja vektorje* ***s****,* ***a*** *in* ***p****. Za vektor* ***p*** *ni nobenih omejitev, dokler njegova vrednost ostane v dosegljivem delovnem prostoru robota. Vektorja* ***s*** *in* ***a*** *pa sta enotska vektorja, ki sta drug na drugega pravokotna, tako da velja:*

$$\mathbf{s \cdot s = 1 \quad , \quad a \cdot a = 1 \quad , \quad s \cdot a = 0}$$

Za orientacijo torej zadoščajo trije elementi. Orientacijo običajno določimo kot zaporedje rotacij okrog x, y in z osi. Z Eulerjevimi koti lahko opišemo poljubno orientacijo, tako da najprej opravimo rotacijo φ okrog osi z, potem rotacijo ϑ okrog nove osi y' in nazadnje rotacijo ψ za okrog trenutne osi z''.

Uporaba homogenih transformacij

***Robotsko prijemalo*:**



Ker vrtimo okrog trenutnega k.s., gre za postmultiplikacije. Tako Eulerjevo transformacijo dobimo na naslednji način:

Euler(φ, ϑ, ψ) = Rot(z, φ)·Rot(y', ϑ)·Rot(z'', ψ)

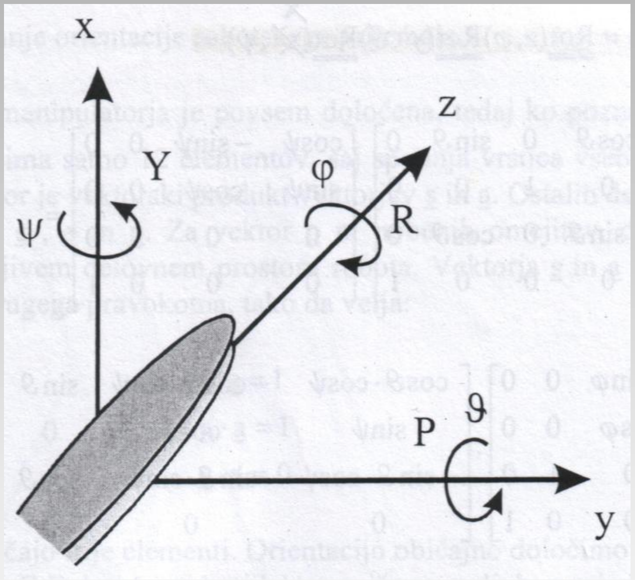
$$\textbf{Euler}(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

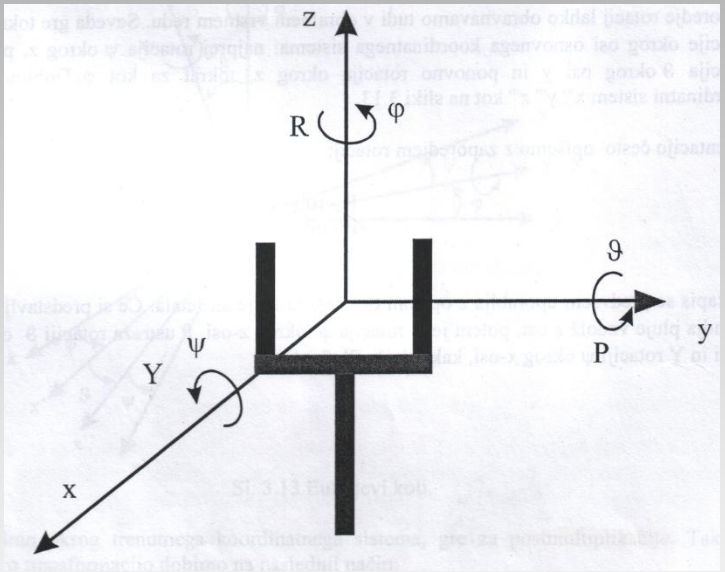
$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi & -\cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \sin\vartheta & 0 \\ \sin\varphi \cos\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \cos\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta \cos\psi & \sin\vartheta \sin\psi & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***Robotsko prijemalo*:**

Orientacijo pogosto zapišemo z zaporedjem rotacij: R (roll, kotaljenje), P (pitch, naklon) in Y (yaw, odklon). Ta zapis se predvsem uporablja pri opisu orientacije ladje ali letala. Če npr. ladja pluje vzdolž z osi, potem je R rotacija φ okrog z osi, P ustreza rotaciji ϑ okrog y osi in Y rotaciji ψ okrog x osi.

Ker je RPY rotacija definirana glede na referenčni k.s., začnemo z rotacijo ψ okrog x osi, sledi rotacija ϑ okrog y osi, končamo pa z rotacijo φ okrog z osi.





RPY(*φ*, *ϑ*, *ψ*) = Rot(z, *φ*)·Rot(y, *ϑ*)·Rot(x, *ψ*)

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & 0 \\ \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robotsko prijemalo:

Naša naloga je izračunati RPY kote prijemala glede na referenčni k.s., zato nas zanima le del matrike, ki opisuje orientacijo:

$$\begin{bmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta & \cos\varphi \sin\vartheta \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \\ \sin\varphi \cos\vartheta & \sin\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \sin\psi & \cos\vartheta \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vartheta = \mathbf{arctg}\, \frac{-e_{1z}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(e^2_{1x} + e^2_{1y} + e^2_{2z} + e^2_{3z}\right)}}}$$

$$\boxed{\varphi = \mathbf{arctg}\, \frac{e_{2z}e_{3x} - e_{3z}e_{2x}}{e_{3z}e_{2y} - e_{2z}e_{3y}}}$$

$$\boxed{\psi = \mathbf{arctg}\, \frac{e_{1y}e_{3x} - e_{1x}e_{3y}}{e_{1x}e_{2y} - e_{1y}e_{2x}}}$$

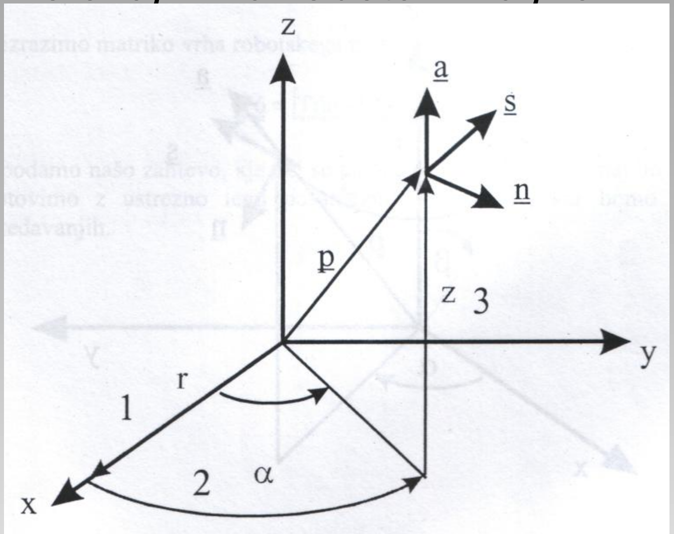
Ko je določena orientacija prijemala, lahko postavimo robota v želeno točko referenčnega sistema tako, da orientacijsko matriko pomnožimo s translacijsko transformacijo:

T6 = [pozicija] · [orientacija]

Arkus tangens števila *a* je število *x*, za katero velja tg *x* = *a*, torej:
arc tg *a* = *x* ⇔ tg *x* = *a*

Robotsko prijemalo:

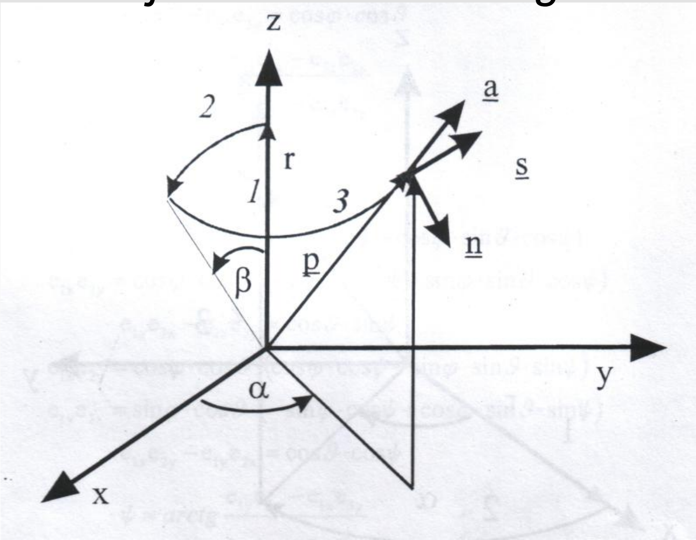
Položaj vrha robota v valjnem koordinatnem sistemu:



Tu gre najprej za translacijo r vzdolž osi x, sledi rotacija α okrog osi z in na koncu translacija z vzdolž osi z.

Cyl(r,*α*,z) = Trans(0,0,z)**·Rot**(z,*α*)**·Trans**(r,*0*,*0*)

Položaj vrha robota v krogelnem koordinatnem sistemu:

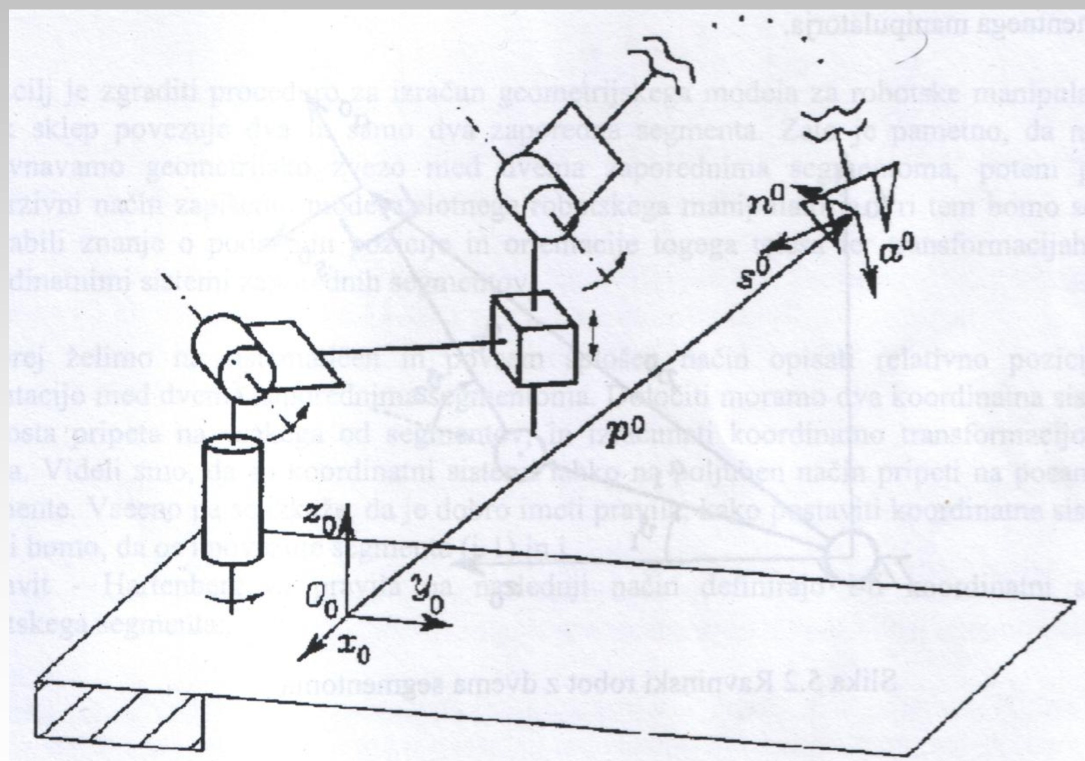


Tu gre najprej za translacijo r vzdolž osi z, sledi rotacija β okrog osi y in na koncu rotacija α okrog osi z.

Sph(*α*,*β*,r) = Rot(z,*α*)**·Rot**(y,*β*)**·Trans**(*0*,*0*,*r*)

Geometrijski model robota

Robotski manipulator je sestavljen iz vrste segmentov (togih teles), ki jih povezujejo sklepi. Vsak sklep je predstavljen s takšno mehansko strukturo, ki ima le eno prostostno stopnjo, ki pa ustreza spremenljivki sklepa. Sklepi so lahko rotacijski ali translacijski. Celotna struktura segmentov in sklepov sestavlja odprto robotsko verigo. En konec verige je pritrjen v bazi robota, na drugem koncu pa je roka robota ali prijemalo, ki omogoča manipulacijo objektov v prostoru.



Geometrijski model robota

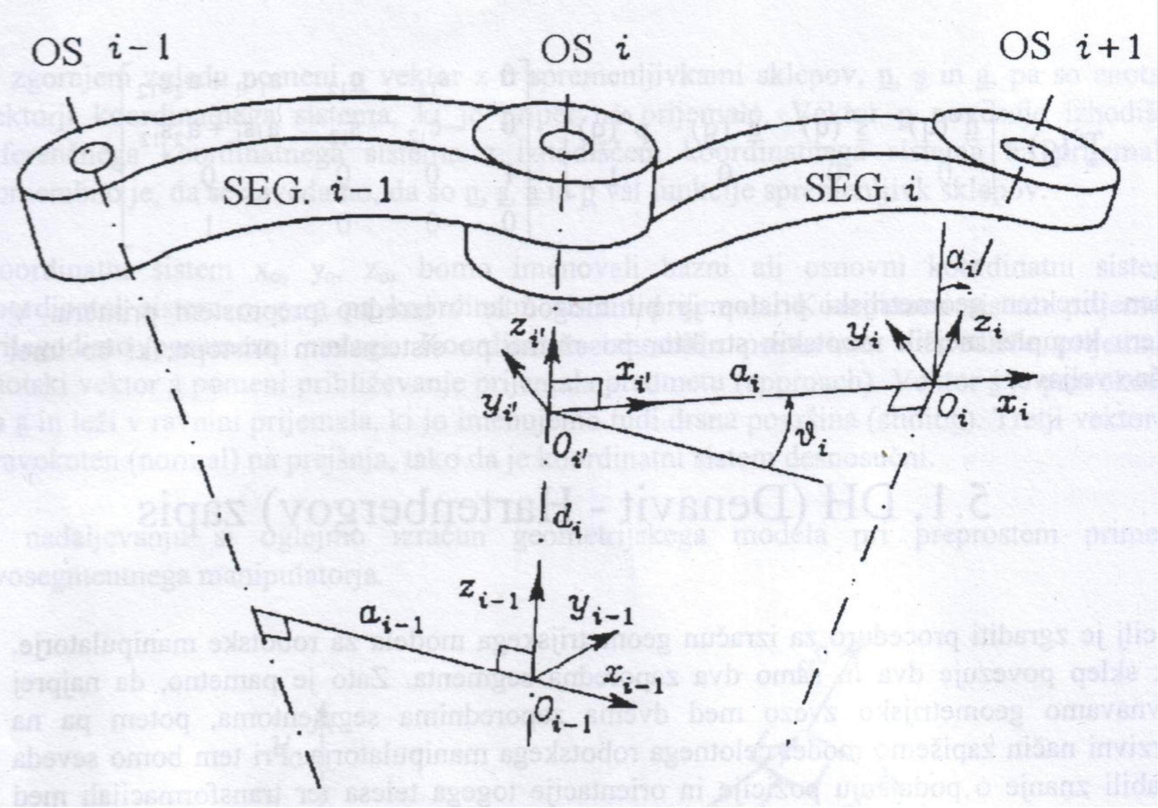
Naloga geometrijskega modela robota je določiti lego (pozicijo in orientacijo) prijemala v odvisnosti od spremenljivk sklepov. Položaj in orientacijo prijemala glede na referenčni KS opišemo s pozicijskim vektorjem, ki povezuje referenčni KS s KS-jem, ki je pripet na prijemalo, ter z enotskimi vektorji KS prijemala. Geometrijski model izražen glede na referenčni KS ima obliko naslednje homogene transformacije:

$$\mathbf{T}^0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0(\mathbf{q}) & \mathbf{s}^0(\mathbf{q}) & \mathbf{a}^0(\mathbf{q}) & \mathbf{p}^0(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

q *je vektor z n spremenljivkami sklepov,* ***n****,* ***s*** *in* ***a*** *pa so enotski vektorji KS, pripetega na prijemalo. Vektor* ***p*** *povezuje izhodišče referenčnega KS z izhodiščem KS prijemala.*

DH (Denavit - Hartenbergov) zapis

Cilj je torej razviti postopek za izračun geometrijskega modela za robotske manipulatorje. Ker vsak sklep povezuje le dva zaporedna segmenta, bomo najprej obravnavali geometrijsko zvezo med dvema zaporednima segmentoma, nato pa bomo na rekurzivni način zapisali model celotnega robotskega manipulatorja. Pri tem bomo uporabili znanje o podajanju pozicije in orientacije togega telesa ter transformacijah med koordinatnimi sistemi zaporednih segmentov.



DH (Denavit - Hartenbergov) zapis

Denavit – Hartenbergova pravila definirajo i-ti koordinatni sistem robotskega segmenta na naslednji način:

1. *Izberi os z_i vzdolž osi sklepa (i+1)*
2. *Postavi izhodišče O_i in $O_{i'}$*
3. *Izberi os x_i vzdolž skupne normale na osi z_{i-1} in z_i, od sklepa i v smeri sklepa (i+1)*
4. *Izberi os y_i, tako da dobiš desnosučni koordinatni sistem*

Lega i-tega koordinatnega sistema je glede na (i-1)-ti koordinatni sistem določena z naslednjimi štirimi parametri:

- a_i *- razdalja med O_i in $O_{i'}$ vzdolž osi x_i*
- d_i *- razdalja med O_{i-i} in $O_{i'}$ vzdolž osi z_{i-1}*
- α_i - kot med osema z_{i-1} in z_i okrog osi x_i. Kot je pozitiven v primeru zasuka, ki je nasproten smeri urinega kazalca.
- ϑ_i - kot med osema x_{i-1} in x_i okrog osi z_{i-1}. Kot je pozitiven v primeru zasuka, ki je nasproten smeri urinega kazalca.

Parametra a_i in α_i sta vedno konstantna. Odvisna sta le od geometrije in povezav med dvema zaporednima sklepoma, ki ju povezuje i-ti segment. Od ostalih dveh parametrov je le en spremenljivka glede ne tip sklepa, ki povezuje i-ti in (i-1)-ti segment:

- če je i-ti sklep rotacijski, je spremenljivka ϑ_i,
- če je i-ti sklep translacijski, je spremenljivka d_i.

DH (Denavit - Hartenbergov) zapis

Transformacijo med i-tim in (i-1)-tim koordinatnim sistemom opišemo z naslednjimi štirimi koraki:

1. *Izberi KS, ki je povezan s KS-om (i-1)*
2. *Translacijsko premakni izbrani KS za razdaljo d_i vzdolž osi z_{i-1} in ga zavrti za kot ϑ_i okrog osi z_{i-1}. ta operacija poravna trenutni KS s KS-om $O_{i'}$*

$$\mathbf{A^{i-1}_{i'}} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. *Translacijsko premakni KS povezan z $O_{i'}$ za razdaljo a_i vzdolž osi $x_{i'}$ in ga zavrti za α_i okrog osi $x_{i'}$. Ta operacija poravna trenutni KS s KS-om O_i*

$$\mathbf{A^{i'}_{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH (Denavit - Hartenbergov) zapis

4. DH transformacijo dobimo s postmultiplikacijo posameznih transformacij:

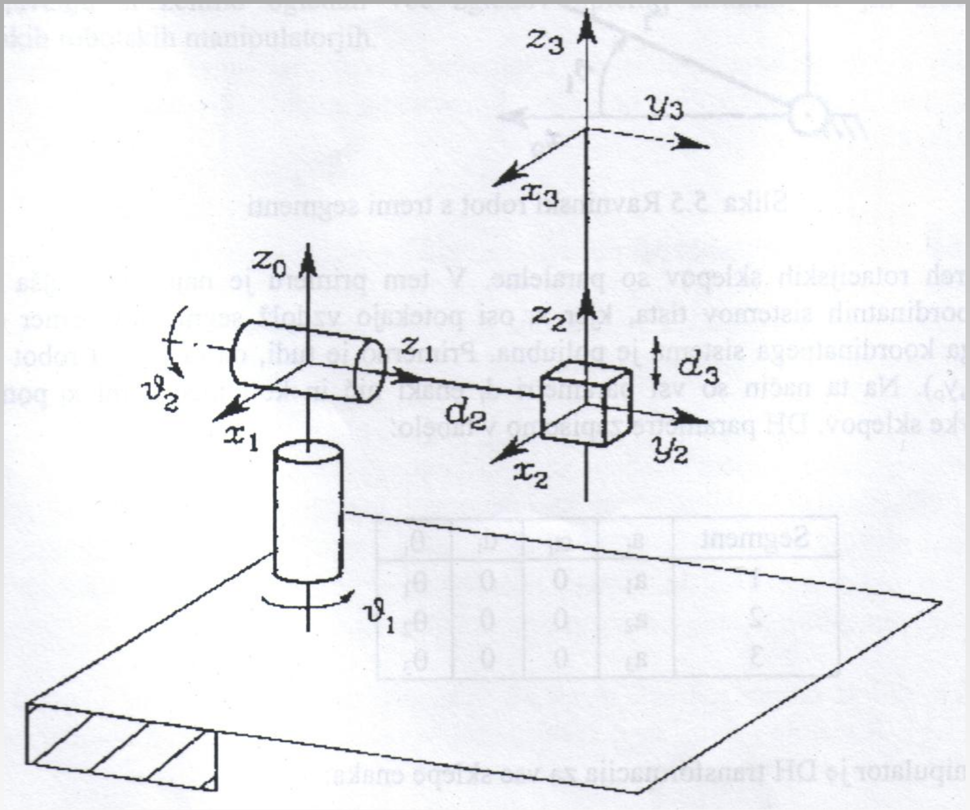
$$\mathbf{A}^{i-1}_{i}(q_i) = \mathbf{A}^{i-1}_{i'} \cdot \mathbf{A}^{i'}_{i} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH zapis omogoča sestavo enačb geometrijskega modela robota, tako da sestavljamo posamezne DH transformacije v eno homogeno transformacijo. Ko določimo koordinatni sistem za vsak segment, izračunamo transformacijo, ki opisuje lego n-tega koordinatnega sistema glede na osnovni koordinatni sistem:

$$\mathbf{T}^{0}_{1}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}^{0}_{1}(q_1) \cdot \mathbf{A}^{1}_{2}(q_2) \cdot \cdot \cdot \mathbf{A}^{n-1}_{n}(q_n)$$

Sferični robotski manipulator

V narisani shematični prikaz robotskega manipulatorja vrišemo referenčni KS ter koordinatne sisteme posameznih segmentov:



*Izhodišče referenčnega KS postavimo v presečišče z_0 in z_1 osi. Na ta način si olajšamo geometrijsko analizo, ker je potem $d_1 = 0$. Tudi izhodišče drugega KS postavimo na presečišče z_1 in z_2 osi. Tretji KS postavimo tako, da ustreza KS-u prijemala (**n**,**s**,**a**). Tretji (translacijski) sklep ne vpliva na rotacijsko matriko.*

Sferični robotski manipulator

DH parametri:

Segment	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	-¶/2	0	ϑ_1
2	0	¶/2	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

Homogene transformacije za posamezne sklepe so naslednje:

$$\mathbf{A^0_1(\vartheta_1)} = \begin{bmatrix} c\vartheta_1 & -s\vartheta_1 c\alpha_1 & s\vartheta_1 s\alpha_1 & a_1 c\vartheta_1 \\ s\vartheta_1 & c\vartheta_1 c\alpha_1 & -c\vartheta_1 s\alpha_1 & a_1 s\vartheta_1 \\ 0 & s\alpha_1 & c\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ker so koti α vselej konstantni pri analizi robotov, lahko izpustimo ϑ in pišemo za kote le ustrezne indekse, sinuse oz. kosinuse kotov α pa izračunamo.

$$\mathbf{A^1_2(\vartheta_2)} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A^2_3(d_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sferični robotski manipulator

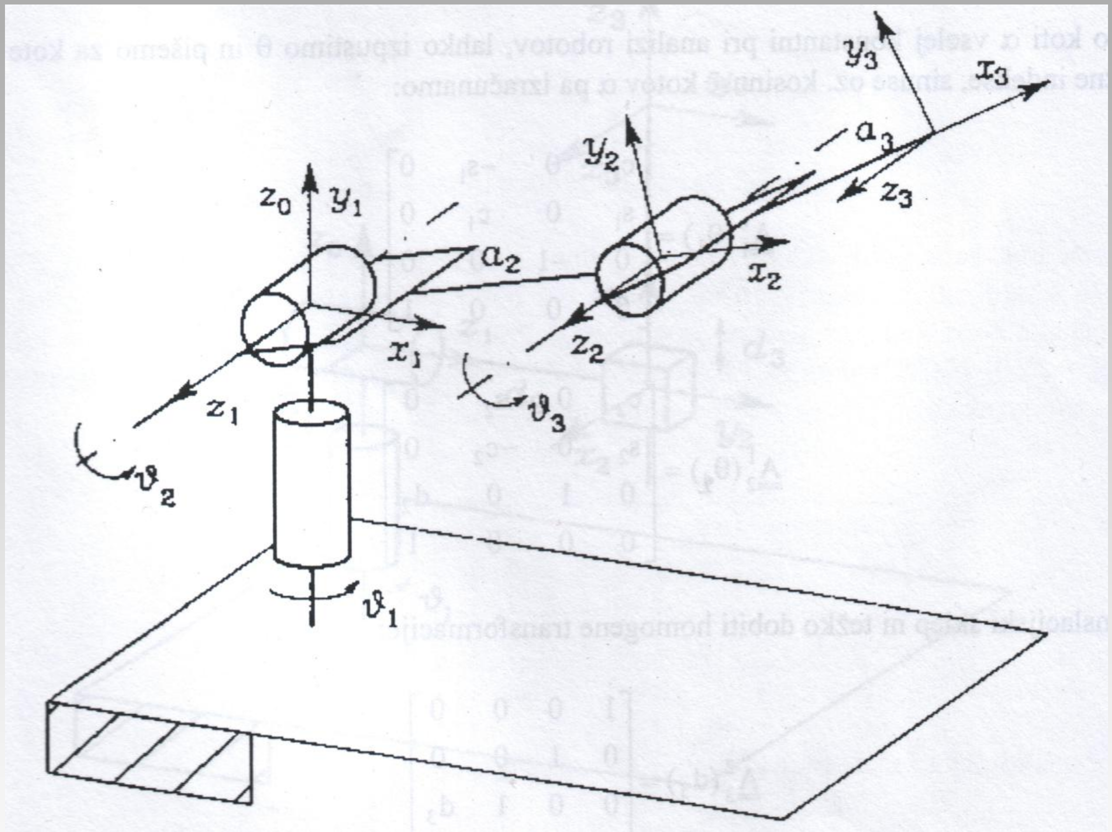
Geometrijski model določimo na naslednji način:

$$\mathbf{T^0_3(q) = A^0_1 \cdot A^1_2 \cdot A^2_3 =} \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3-s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3+c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vartheta_1, \vartheta_2, d_3 \end{bmatrix}^T$$

Antropomorfni robotski manipulator

Spet najprej narišemo referenčni KS in koordinatne sisteme posameznih segmentov:



Izhodišče referenčnega KS postavimo v presečišče z_0 in z_1 osi. Na ta način si olajšamo geometrijsko analizo, ker je potem $d_1 = 0$. Osi z_1 in z_2 sta paralelni, osi x_1 in x_2 pa potekata vzdolž segmentov.

Antropomorfni robotski manipulator

DH parametri:

Segment	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	¶/2	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Homogene transformacije za posamezne sklepe so naslednje:

$$\mathbf{A^0_1(\vartheta_1)} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^{i-1}_i(\vartheta_i)} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{i = 2, 3}$$

Antropomorfni robotski manipulator

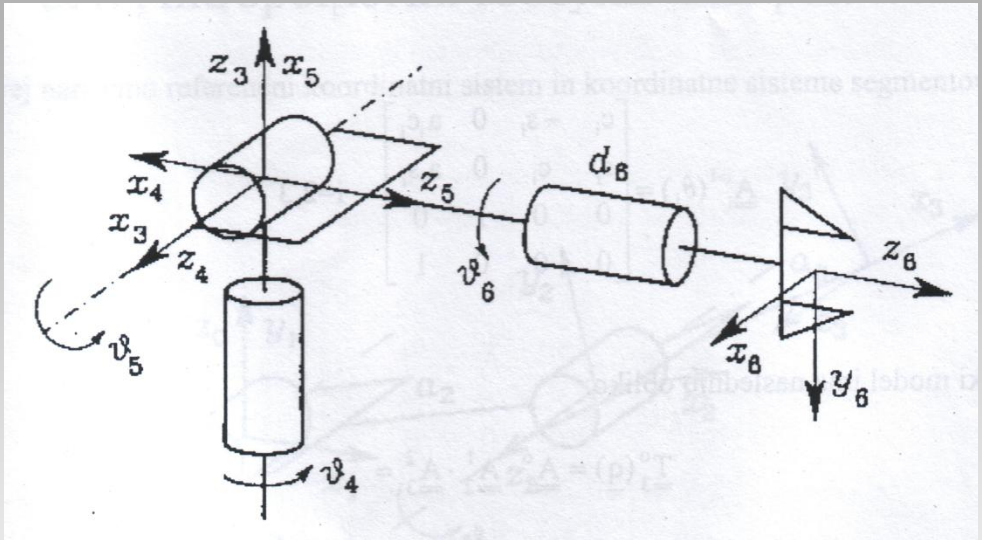
Geometrijski model določimo na naslednji način:

$$\mathbf{T^0_3(q) = A^0_1 \cdot A^1_2 \cdot A^2_3 =} \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2s_2+a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \end{bmatrix}^T$$

Sferično robotsko zapestje

Oglejmo si še strukturo robotskega zapestja.



Spremenljivke zapestja začnemo šteti od 4 naprej, ker je zapestje običajno pritrjeno na vrh robotske roke s tremi DOF. Tako skupno dobimo manipulator s 6 DOF. Značilnost robotskega zapestja je, da se vse tri osi rotacijskih sklepov sekajo v isti točki. Potem ko določimo osi z_3, z_4 in z_5 in ko izberemo smer osi x_3 sta s tem določeni tudi smeri osi x_4 in x_5.

Sferično robotsko zapestje

DH parametri:

Segment	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	-¶/2	0	ϑ_4
5	0	¶/2	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

Homogene transformacije za posamezne sklepe so naslednje:

$$\mathbf{A^3_4(\vartheta_4)} = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A^4_5(\vartheta_5)} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^5_6(\vartheta_6)} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sferično robotsko zapestje

Geometrijski model določimo na naslednji način:

$$\mathbf{T^3_6(q) = A^3_4 \cdot A^4_5 \cdot A^5_6 =} \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5c_6 & 0 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6 \end{bmatrix}^T$$